
EX·LIBRIS
OLIVER B. HENSHAW

Katechismus der Logarithmen.

Von **Max Meyer.** Mit 3 Tafeln und 7 Abbildungen.
Preis gebunden 2 Mark.

Katechismus der Markscheidekunst.

Von **O. Brathuhn.** Mit 174 Abbildungen.
Preis gebunden 3 Mark.

Katechismus der Nivellierkunst.

Von Prof. Dr. **C. Pietsch.** Vierte, umgearbeitete Aufl. Mit 61 Abbildungen.
Preis gebunden 2 Mark.

Katechismus der Raumberechnung.

Anleitung zur Größenbestimmung von Flächen und Körpern jeder Art von Dr. **C. Pietsch.** Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 55 Abbildungen.
Preis gebunden 1 Mark 80 Pf.

Katechismus der Trigonometrie.

Von **Franz Bendt.** Zweite, erweiterte Aufl. Mit 42 Figuren.
Preis gebunden 1 Mark 80 Pf.

Katechismus

der

Differential- und Integralrechnung.

Katechismus

der

Differential- und Integralrechnung

von

Franz Bendt.

Mit 39 in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig
Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber
1896

Vorwort.

Es sind kaum fünf Jahrzehnte verflossen, da war die Differential- und Integralrechnung noch ein Wissensgebiet, mit dem sich ausschließlich der Mathematiker und der Astronom beschäftigten. Die Vertreter der anderen naturwissenschaftlichen Fächer standen Untersuchungen, die ihre Kenntnis voraussetzten, ganz fern, und selbst die Mehrzahl der Physiker, vorzüglich die deutschen Physiker, glaubten sich solchen Untersuchungen verschließen zu können.

Das hat sich seitdem durchaus geändert.

Es giebt jetzt fast kein Gebiet im Reiche der Naturwissenschaften und der Technik mehr, in dem nicht häufig Untersuchungen angestellt werden müssen, die die höhere Analysis voraussetzen. Wer genötigt ist, Abhandlungen technischen oder chemischen, physiologischen oder statistischen Inhalts und dergl. zu lesen, oder Lehrbücher über die Disziplin zu studieren, bedarf der höheren Mathematik.

Allüberall stößt man in ihnen auf Differentialformeln und schlanke Integralzeichen. Der Arzt, der Chemiker, der nicht akademisch gebildete Techniker und überhaupt jeder Freund der Naturwissenschaft kommt daher häufig beim Studium bedeutungsvoller Arbeiten in Verlegenheit und ist nicht fähig sie ganz zu erfassen. Er wird gezwungen, sich mit der Infinitesimalmethode vertraut zu machen, wenn er sich nicht in seinen Zielen beschränken will.

In Deutschland giebt es jetzt eine große Zahl ganz vortrefflicher Lehrschriften über die Differential- und Integralrechnung. Aber fast alle diese Werke sind zum Studium für den künftigen Mathematiker verfaßt oder sie wenden sich gar an den vollendeten Fachmann. Es sind daher zumeist umfangreiche Werke, die häufig mehrere Bände umfassen und eine nicht geringe algebraische Gewandtheit und bedeutende Kenntnisse voraussetzen. Männer mit mathematischen Kenntnissen kann man aber — selbst unter solchen von akademischer Bildung — mit der Laterne suchen. Der Durchschnittsleser wird daher nicht imstande sein diese Lehrbücher zu bewältigen, ganz abgesehen davon, daß ein Mann, der seinen Beruf zu erfüllen hat, nur selten Zeit dazu findet, umfangreiche Werke zu studieren.

Das ist auch seit lange erkannt worden. Die deutsche mathematische Litteratur besitzt Lehrschriften, die auf wenigen Bogen die ersten Elemente der höheren Mathe-

matik entwickeln. Sie verfallen nur wiederum in den entgegengesetzten Fehler, sie geben zu wenig!

Der Verfasser hat den Versuch gemacht, zu vermitteln. Der Katechismus der Differential- und Integralrechnung enthält die wichtigsten Methoden und Verwendungen, die auch die größeren Lehrschriften bringen; ein Blick in das Inhaltsverzeichnis giebt dafür den Beweis. Er hat sich ferner bemüht die Entwickelung ganz elementar zu gestalten und die Rechnungen fast überall vollständig durchgeführt. Um das auf kleinem Raume zu ermöglichen, mußte er die Darstellung nach anderer Richtung beschränken.

Unser Katechismus soll der Praxis dienen. Er wendet sich an Leser, die die Mathematik nur als Mittel für ihren besonderen Zweck betreiben. Der Verfasser durfte daher auf absolut strenge Beweisführuug der Lehrsätze verzichten und sich begnügen sie verständlich zu machen. Das geschah u. a. dadurch, daß an Stelle allgemeiner Ableitungen charakteristische Beispiele gesetzt und durchgeführt wurden.

Der Verfasser rechnet und hofft nicht auf die Gunst der Mathematiker; er ist befriedigt, wenn es ihm gelingt, seinen Lesern in kurzer Zeit das Studium der Schriften zu ermöglichen, in denen die höhere Mathematik verwendet wird. Vielleicht stellt sich bei solchen später, nachdem die ersten Schwierigkeiten überwunden sind, der Wunsch ein, auch noch aus tieferen Quellen mathematische Weisheit zu schöpfen.

Ueber das Maß von Kenntnissen, die der Katechismus voraussetzt, sowie über die besten Werke, die sich zum Weiterstudium eignen, giebt der kleine Anhang unter dem Titel „Mathematische Litteratur“ Auskunft.

Endlich sei noch Herrn Gymnasiallehrer Scheibe der Dank für die gefällige Ausführung der Figuren hier öffentlich ausgesprochen.

Franz Bendt.

Inhaltsverzeichnis.

Dritter Teil.

Die Integralrechnung.

Berichtigungen:

Seite 49 Zeile 25 von oben lies: 1 statt 2.
„ 114 „ 4 „ „ „ $hf'(x)$ statt $hf''(x)$.

Katechismus

der

Differential- und Integralrechnung.

Einleitung.

Die Differential- und Integral- oder die Infinitesimalrechnung, die in ihrer gesamten Ausdehnung auch wohl als höhere Analysis bezeichnet wird, bildet den Schlußstein am Palaste der Mathematik. Wenn auch in vereinzelten Fällen schon die alten Mathematiker Aufgaben lösten, aus denen die Grundidee der höheren Analysis hervorleuchtet, — wir erinnern nur an die Kugelbeweise des Archimedes —, so muß sie dennoch in ihrer methodischen Entwickelung als eine durchaus moderne Wissenschaft bezeichnet werden, die den Stempel der neuen Zeit an ihrer Stirn trägt. — Isaac Newton (1643—1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) sind unabhängig von einander die Erfinder der Differential- und Integralrechnung.

Ermöglicht wurde die merkwürdige Disziplin durch die Analytische Geometrie, deren Erfinder der große Franzose René Descartes (1596—1650) ist. Er zeigte, daß geometrische Gebilde durch Formeln dargestellt werden können, mit denen man fähig ist, wie mit algebraischen Gleichungen zu operieren.

Aber erst die Differentialrechnung giebt die Methoden, durch die man im stande ist aus den Gleichungen einer Kurve oder Fläche ihre Eigenschaften zu ermitteln.

1*

Sie schildert gleichsam auf das genaueste ihren Verlauf, ihre Krümmungen und Knickungen, ihre höchsten und tiefsten Punkte u. s. w.

Die **Integralrechnung** kann als das Umgekehrte der Differentialrechnung bezeichnet werden. Sie lehrt beispielsweise aus den Eigenschaften eines geometrischen Gebildes dessen Gleichung finden. Aber auch der Astronom, der durch die Beobachtung eines Gestirns, der Physiker, welcher aus dem Studium einer Erscheinung gewisse Regelmäßigkeiten ermittelt hat, erhält aus der Integration den Weg, auf dem sich das Gestirn bewegt, resp. das Gesetz, dem die Erscheinung folgt. Die höhere Analysis ist daher von größter Bedeutung für die astronomische, physikalische und technische Wissenschaft; ja diese sind jetzt ohne die erste nicht mehr denkbar.

Unser Buch zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten werden Sätze entwickelt, die der **algebraischen Analysis** zugehören, einer Disziplin, welche man als Fortsetzung der elementaren Algebra betrachten kann. Sie sind unerläßlich zum Verständnis des zweiten und dritten Abschnittes, in denen die Differential- bezüglich die Integralrechnung zum Vortrag kommt.

Erster Teil.

Die algebraische Analysis.

Erstes Kapitel.

Vom binomischen Lehrsatz.

1. Der binomische Satz.

In den Elementen der Algebra wird gelehrt, daß man für ein Binom, das auf einen Exponenten erhoben, also zu einer Potenz gemacht worden ist, einen Ausdruck erhält, der gesetzmäßig verläuft, z. B.:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

u. s. w.

Durch den großen Mathematiker Newton wurde gezeigt, daß man in dieser Weise auch zu dem ganz allgemeinen Ausdruck von der Form kommt:

1) $$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} . b + \frac{n(n-1)}{1 . 2} a^{n-2} . b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} a^{n-3} . b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n,$$

in dem der Exponent n jeden beliebigen Wert annehmen kann, gleichgültig ob er positiv oder negativ ist. Dieser Satz wird als der binomische Lehrsatz bezeichnet.

Die Ausdrücke

$$\frac{n}{1}, \ \frac{n(n-1)}{1.2} \text{ rc.}$$

nennt man die Binominal-Koeffizienten, und schreibt in ihnen die Nenner 1.2, 1.2.3 rc. gewöhnlich kürzer, und zwar

$$1.2 = 2!, \ 1.2.3 = 3!$$
$$1.2.3.4 \ldots . n = n!$$

und liest für n! „n-Fakultät", für 3! „3-Fakultät".

Das beachtet, erscheint der binomische Lehrsatz in der Form:

$$2) \qquad (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots + b^n.$$

2. Die Binomial-Koeffizienten.

Es sollen nun zunächst einige Sätze aus dem binomischen Lehrsatze entwickelt werden.

Setzen wir in die Gleichung 2) $a = b = 1$, dann geht sie über in:

$$3) \quad 2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots\cdots + 1.$$

Es folgt aus 3) der bedeutungsvolle Satz: daß die Summe aller Binomial-Koeffizienten gleich 2^n ist.

Entwickeln wir ferner die Binomial-Formel für irgend einen bestimmten Exponenten, z. B.

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7,$$

so wird sich stets zeigen, daß die Koeffizienten, die gleich weit vom Ende und Anfang entfernt stehen, gleich groß sind.

Das Gesetz der Binomial-Koeffizienten, das im binomischen Lehrsatze klar hervortritt, hat Pascal bereits in einer sehr übersichtlichen Form angegeben, die man als das Pascalsche Dreieck bezeichnet.

Entwickeln wir, um diese Form zu erhalten, den Ausdruck $(a + b)^n$, indem wir für n nach einander 1, 2, 3 u. s. w. setzen und die Koeffizienten unter einander schreiben. Dann ergiebt sich:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
u. s. w.

Das Pascalsche Dreieck.

Aus dem Ausdruck ersieht man unmittelbar, daß die Summe des rten und (r + 1)ten Koeffizienten immer gleich ist dem (r + 1)ten Koeffizienten, der nächst höheren Potenz. Also wenn man die Binomial-Koeffizienten mit b bezeichnet, so folgt:

4) $$(n+1)\, b^{r+1} = (n)\, b^{r} + (n)\, b^{r+1}.$$

Hierin bedeuten n und n + 1 die Potenzen, r und r + 1 die Stellung der Koeffizienten. — Erläutern wir den Satz 4) noch an einem praktischen Beispiele. Aus dem Pascalschen Dreieck ergiebt sich, daß der dritte Koeffizient von $(a + b)^5$ gleich ist dem zweiten und dritten Koeffizienten von $(a + b)^4$. Daher

$$10 = 4 + 6$$

oder in der Sprache der Formel 4)

$$(5)\, b^3 = (4)\, b^2 + (4)\, b^3.$$

Zweites Kapitel.

Die unendlichen Reihen.

3. Definition.

Schon die Elemente der Algebra machen mit unendlichen Reihen bekannt. Wir haben nur nötig uns an die unendlichen Dezimalbrüche und an die arithmetischen und geometrischen Reihen zu erinnern. Sollen solche Reihen nutzbringend sein, dann müssen ihnen bestimmte Eigenschaften zukommen, welche wir zunächst besprechen wollen. Wir verfahren da am besten, wenn wir an die bekannten Vorgänge, die die geometrischen Reihen zeigen, anknüpfen. Nehmen wir die geometrische Reihe an:

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\cdots$ u. s. w.

Sie soll sich beliebig weit erstrecken. Die Summe der Reihe kann dann, wie bekannt, durch die Formel:

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

bestimmt werden, in der a das Anfangsglied, q den Quotienten und n die Anzahl der Glieder bedeutet. Die Summe entspricht einer unendlichen Reihe, wenn $n = \infty$ wird. — Bestimmen wir zunächst die Summe für die Reihe 1) für unendlich viele Glieder. Dann ist:

$$s = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

Das besagt also, daß je mehr Glieder der Reihe 1) man addiert, um so mehr sich ihre Summe der Eins nähert.

Eine Reihe, deren Summe für eine sehr große Anzahl von Gliedern sich einer bestimmten endlichen Zahl oder, wie man zu sagen pflegt, einer bestimmten Grenze (limes, abgekürzt lim.) nähert, nennt man konvergent. Bezeichnet s die Summe, dann deutet man das an durch den Ausdruck:

2) $$\lim_{n=\infty} s = s,$$

d. h. „der Grenzwert der Reihensumme für n gleich unendlich ist s".

Kann ein solcher Grenzwert nicht nachgewiesen werden, dann nennt man die Reihe eine divergente. Für uns sind nur die konvergenten Reihen von Bedeutung.

4. Untersuchungen über die Konvergenz.

Die allgemeine geometrische Reihe:

3) $a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \cdots\cdots + ax^{n-1}$

hat die Summe:

$$s = \frac{ax^n - a}{x - 1} = \frac{a - ax^n}{1 - x}.$$

Nehmen wir an, es sei in der Reihe 3) $n = \infty$. Ist nun $x = 1$, dann ergiebt sich, daß die Reihe divergent ist; daraus folgt, daß sie für $x > 1$ erst recht divergent sein muß. — Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Angelegenheit für $x < 1$ gestaltet. Schreiben wir hierzu die Summenformel:

$$s = \frac{a}{1 - x} - \frac{ax^n}{1 - x},$$

dann zeigt sich sofort, daß $x^n = x^\infty = 0$ ist. Somit muß auch das Glied:

$$\frac{ax^n}{1 - x} = 0$$

sein.

Die Summenformel der geometrischen Reihe für $x < 1$ geht also über in:

$$s = \frac{a}{1 - x}$$

und das ist ein endlicher Wert.

Das ergiebt den Satz:

I. Eine unendliche geometrische Reihe ist immer konvergent, wenn ihr Quotient kleiner als Eins, also ein echter Bruch ist. Kann man somit von irgend einer Reihe nachweisen, daß der Quotient zwischen zwei sich folgenden Gliedern immer derselbe und kleiner als Eins ist, dann ist auch der Nachweis für ihre Konvergenz gelungen.

Die Untersuchungen über die unendlichen Reihen und ihre Konvergenz sind besonders in den Fällen von Wichtigkeit, wo es darauf ankommt, einen geschlossenen Ausdruck in eine Reihe zu entwickeln, die nach ganzen und positiven Potenzen von x fortschreitet. Der binomische Lehrsatz ist ein Beispiel dafür, daß ein geschlossener Ausdruck durch eine Reihe dargestellt werden kann. Ist in ihm der Exponent ein echter Bruch, dann geht die Entwickelung in eine unendliche Reihe über, die für $x < 1$ immer konvergent ist. Z. B. $(1 + x)^{1/2}$ und $x < 1$.

Auch durch einfache **Division** können unendliche Reihen erzeugt werden.

Dividieren wir in dem Bruch $\frac{1}{1-x}$ mit dem Nenner in den Zähler, dann ergiebt sich nach der Reihe:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}.$$

Allgemein:

$$4) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Die Division kann selbstverständlich beliebig weit ausgeführt werden. Es ist hier wohl unzweifelhaft, daß die Summe auf der rechten Seite der Gleichung dem geschlossenen Ausdruck auf der linken Seite gleich sein muß. Das führt zu folgenden zwei Sätzen, die nunmehr leicht einzusehen sind.

Satz II. **Jede unendliche Reihe:**

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\cdots,$$

die nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitet und in der a, a_1, a_2 rc. endliche Zahlen sind und $x < 1$ ist, ist konvergent.

Satz III. **Das Endglied einer solchen konvergenten Reihe muß immer gleich Null sein.**

In unserer Reihe ist für $n = \infty$ und $x < 1$ der Ausdruck

$$\frac{x^\infty}{1-x} = 0.$$

5. Alternierende Reihen.

Häufig erscheinen in der Rechnung Reihen, deren Vorzeichen fortdauernd wechseln; man nennt sie **alternierende Reihen**. So ist z. B.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \text{ etc.} - \cdots$$

eine alternierende Reihe.

Satz IV. **Alternierende Reihen, in denen die Glieder immer bis zu Null abnehmen, sind immer konvergent.** Man kann sich vom schnellen Abnehmen solcher Reihen auch leicht überzeugen, wenn man immer zwei Glieder zusammennimmt. Z. B.:

$$(1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) + \cdots$$

das giebt:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{30} + \cdots$$

Merken wir uns noch den Satz V.

Eine Reihe von der Form:

$$5) \qquad \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \cdots$$

ist immer konvergent, wenn r größer als Eins ist. Z. B.:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots$$

Wie man hier sofort sieht, ist diese Reihe vom zweiten Gliede an eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$. Satz I (Seite 9) kann also hier unmittelbar Verwendung finden.

Allgemeines: Es seien zwei unendliche konvergente Reihen gegeben, die mit der Veränderlichen x fortschreiten und die für denselben Wert von x, für jedes Glied, den gleichen Wert geben. Also:

$$6) \qquad a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

$$\text{und } 7) \qquad \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots$$

Dann muß auch sein:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \cdots$$

und es sind gleichfalls die Koeffizienten, die vor gleichen Potenzen von x stehen, einander gleich. Also:

$$a = \alpha; \ b = \beta; \ c = \gamma; \ d = \delta \text{ ꝛc.}$$

6. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Die Reihenentwickelung geschlossener Ausdrücke ist in hervorragender Weise bedeutungsvoll für die trigonometrischen und Exponential-Funktionen, also für $\sin x$, a^x ꝛc. Diese Reihen sind fast immer transcendent, d. h. unendlich. Im zweiten Teile unserer Ausführungen werden wir sie mit Hilfe der Differentialrechnung entwickeln. Zunächst sollen hier schon einige Reihen Erledigung finden, um den großen Vorteil der Differentialmethode recht deutlich zu erkennen. Man bedient sich zur Entwickelung sehr häufig der Methode der unbestimmten Koeffizienten, und diese soll daher an einigen praktischen Beispielen vorgeführt werden.

Wählen wir einen Bruch, dessen Zähler und Nenner nach steigenden ganzen Potenzen von x fortschreiten und bilden wir, wie auf Seite 10 angedeutet, durch Division eine Reihe. Der Bruch sei:

$$\frac{2 + 4x}{1 - 2x + 3x^2},$$

dann wird:

$$8) \quad \frac{2 + 4x}{1 - 2x + 3x^2} = 2 + 8x + 10x^2 - 4x^3 \text{ ꝛc.}$$

Durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten kann das Verfahren sehr vereinfacht werden.

Die Reihe, die nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreiten muß, soll zunächst nur angedeutet werden.

Wir schreiben daher:

$$9) \quad \frac{2 + 4x}{1 - 2x + 3x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

Es müssen nunmehr die Koeffizienten a_0, a_1 ꝛc. bestimmt werden. Das geschieht in folgender Weise. Man schafft den Nenner fort; also

$$10)\quad 2 + 4x = (1 - 2x + 3x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\cdots)$$

und führt die Multiplikation wirklich aus. Dann stellt man das Resultat in der folgenden übersichtlichen Weise zusammen:

$$11)\quad 2 + 4x = a_0 \left.\begin{matrix} -2a_0 \\ \\ +a_1 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +3a_0 \\ -2a_1 \\ +\ a_2 \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +3a_1 \\ -2a_2 \\ +\ a_3 \end{matrix}\right\} x^3 \quad \text{ꝛc.}$$

Die Ausdrücke linker und rechter Hand müssen sich gleich sein. Steht nun rechts vom Gleichheitszeichen eine konvergente Reihe, dann werden auch die Koeffizienten für gleich hohe Potenzen von x auf beiden Seiten mit einander übereinstimmen. Man denke sich nunmehr, um zum Ziele zu gelangen, den linken Ausdruck folgendermaßen geschrieben:

$$2 + 4x + 0 \cdot x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots\cdots \text{ ꝛc.}$$

dann ist, wenn wir die Ausdrücke gleich hoher Potenzen von x einander gleich setzen:

$$a_0 = 2$$

$$a_1 - 2a_0 = 4 \text{ und somit:}$$

$$a_1 = 4 + 2a_0 = 4 + 4 = 8$$

$$3a_0 - 2a_1 + a_2 = 0 \text{ daher:}$$

$$a_2 = 2a_1 - 3a_0 = 16 - 6 = 10$$

$$3a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \text{ und:}$$

$$a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 20 - 24 = -4.$$

Wir erhalten also den Wert:

$$\frac{2 + 4x}{1 - 2x + 3x^2} = 2 + 4x + 10x^2 - 4x^3 \text{ ꝛc.}$$

Es ist derselbe, den uns die Division gab.

7. Die Entwickelung von a^x.

Es soll mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Exponential-Funktion a^x in eine Reihe entwickelt werden.

Da für $x = 0$ der Ausdruck $a^x = 1$ wird, so muß, wie unmittelbar ersichtlich, die Reihe mit 1 beginnen. Man kann nunmehr setzen:

12) $a^x = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + m_4 x^4 + \cdots$ 2c.

Um zu entwickeln setzen wir für x den Ausdruck $x + \alpha$, dann geht die Reihe 12) über in:

13) $$a^{x+\alpha} = 1 + m_1 (x + \alpha) + m_2 (x + \alpha)^2 + m_3 (x + \alpha)^3 + \cdots\cdots$$

Entwickeln wir nun die einzelnen Werte:

$$m_1 (x + \alpha) = m_1 x + m_1 \alpha,$$
$$m_2 (x + \alpha)^2 = m_2 x^2 + 2 m_2 x \alpha + m_2 \alpha^2,$$
$$m_3 (x + \alpha)^3 = m_3 x^3 + 3 m_3 x^2 \alpha + 3 m_3 x \alpha^2 + m_3 \alpha^3,$$

u. s. w.

Setzen wir in 13) ein und ordnen nach Potenzen von α, so folgt:

14) $$a^{x+\alpha} = (1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \cdots\cdots) + (m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \cdots\cdots) \alpha + (m_2 + 3 m_3 x + \cdots\cdots) \alpha^2 + \cdots\cdots$$

Vergleichen wir diese Ausführung mit der Gleichung 12), dann sieht man, daß die erste Klammer von 14) gleich a^x ist. Das berücksichtigt ergiebt:

15) $$a^{x+\alpha} = a^x + (m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \cdots\cdots) \alpha + (m_2 + 3 m_3 x + \cdots\cdots) \alpha^2 + \cdots\cdots$$

Erinnern wir uns nun der Beziehung:

$$a^{x+\alpha} = a^x \cdot a^\alpha,$$

und daß entsprechend 12) der Ausdruck

$$a^\alpha = 1 + m_1 \alpha + m_2 \alpha^2 + m_3 \alpha^3 + \cdots\cdots$$ ist,

so geht der Ausdruck 15) über in:

16) $$a^{x+\alpha} = a^x . a^\alpha = a^x (1 + m_1 \alpha + m_2 \alpha^2 + m_3 \alpha^3 + \cdots) = a^x + m_1 a^x \alpha + m_2 a^x \alpha^2 + m_3 a^x \alpha^3 + \cdots$$

Da die Beziehungen 15) und 16) gleich sind, so müssen, nach dem bereits verwendeten Grundsatze, auch die Koeffizienten der übereinstimmenden Potenzen von α einander gleich sein.

Also:

$$m_1 a^x a = (m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \cdots) a$$

oder

17) $$m_1 a^x = m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \cdots$$

Setzen wir weiter in $m_1 a^x$ für a^x den Wert der Gleich. 12) ein, dann ergiebt sich die Beziehung:

18) $$m_1 (1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \cdots\cdots) = m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \cdots\cdots$$

oder auch:

19) $$m_1 + m_1^2 x + m_1 m_2 x^2 + m_1 m_3 x^3 + \cdots\cdots = m_1 + 2 m_2 x + 3 m_3 x^2 + \cdots\cdots$$

Da die Koeffizienten gleicher Potenzen von x gleich sind, so folgt unmittelbar:

$$m_1 = m_1,$$
$$2 m_2 = m_1^2$$

oder $$m_2 = \frac{m_1^2}{2},$$

$$3 m_3 = m_1 m_2,$$

daher: $$m_3 = \frac{m_1 m_2}{3} = \frac{m_1 m_1^2}{2 . 3} = \frac{m_1^3}{2 . 3}.$$

Setzen wir nunmehr zum Schluß die Werte in 12) ein, so erhalten wir die gewünschte Reihe

20) $$a^x = 1 + m_1 x + \frac{m_1^2}{2} x^2 + \frac{m_1^3}{2 . 3} x^3 + \cdots\cdots,$$

in der die Koeffizienten m_1 einen ganz allgemeinen Wert besitzen.

8. Die Entwickelung von e^x.

Wir wollen die Reihe 20) spezialisieren. Setzen wir $x = 1$, dann geht 20) über in:

21) $$a = 1 + \frac{m_1}{1} + \frac{m_1^2}{2} + \frac{m_1^3}{1 . 2 . 3} + \cdots,$$

kürzer in

$$a = 1 + m_1 + \frac{m_1^2}{2!} + \frac{m_1^3}{3!} + \cdots\cdots$$

Wie man sofort sieht, ist der Wert von a durch m_1 gegeben. Sei $m_1 = 1$; wir wollen, wie es gebräuchlich ist, diesen Wert von a mit e bezeichnen. Also:

22) $$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

Addiert man die Ausdrücke auf der rechten Seite, dann erhalten wir den bemerkenswerten Wert:

$$e = 2.7182818 \ldots\ldots$$

In Gleichung 20) eingefügt ergiebt die Reihe:

23) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

Das ist ein sehr bedeutungsvoller und wichtiger Satz.

Die Koeffizienten m_1 in der Reihe 20) sollen jetzt noch genauer bestimmt werden.

Da x für jeden beliebigen Wert gilt, so dürfen wir auch

$$x = \frac{1}{m_1}$$

setzen. Thun wir das, dann geht 20) über in die Reihe:

$$a^{\frac{1}{m_1}} = 1 + \frac{m_1 \cdot 1}{m_1} + \frac{m_1^2 \cdot 1}{m_1^2 \cdot 2!} + \frac{m_1^3}{m_1^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots\cdots$$

oder in

24) $$a^{\frac{1}{m_1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit 22), dann folgt:

$$a^{\frac{1}{m_1}} = e$$

und daraus: $$a = e^{m_1}.$$

Nunmehr nehmen wir die Logarithmen, also

$$m_1 \log e = \log a,$$

dann erhalten wir einen neuen Wert für m_1:

$$m_1 = \frac{\log a}{\log e},$$

den wir in 20) einsetzen:

25) $$a^x = 1 + \frac{\log a}{\log e} \cdot x + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Das ist die Reihe für a^x, die wir erhalten wollten.

9. Logarithmen-Systeme.

Unsere Auseinandersetzungen führen zu einer Erweiterung des Logarithmen-Systems, die für die höhere Mathematik von großer Bedeutung ist; wir wollen daher dieser Angelegenheit nähertreten.

Die Basis der sogenannten gemeinen oder Briggsschen Logarithmen, die man in den Tafeln berechnet vorfindet, ist bekanntlich 10. In der höheren Mathematik verwendet man fast ausschließlich ein System, dessen Basis die von uns soeben bestimmte Zahl $e = 2.7182818 \ldots$ ist. Diese Logarithmen nennt man natürliche Logarithmen und man bezeichnet sie durch ein einfaches „l“. Also $l\,a$ heißt der natürliche Logarithmus von a.

Auch die natürlichen Logarithmen findet man in den meisten Tafeln bereits berechnet vor. Beispielsweise im Katechismus der Logarithmen. Wir wollen nunmehr die Reihe für a^x auch durch die natürlichen Logarithmen ausdrücken.

In der Algebra wird gezeigt, daß der Logarithmus von der Basis eines jeden Logarithmen-Systems immer den Wert 1 hat und daß der Logarithmus von 0 gleich $-\infty$ ist. Also ist:

$$\log 10 = 1, \qquad \log 0 = -\infty,$$
$$l\,e = 1, \qquad l\,0 = -\infty.$$

Bedenken wir das, dann können wir schreiben:

$$\frac{\log a}{\log e} = \frac{l.\,a}{l.\,e} = \frac{l.\,a}{1} = l\,a.$$

Die Reihe 25) geht nun wiederum über in die von uns gewünschte Form:

26) $$a^x = 1 + x\,l\,a + \frac{(x.\,l\,a)^2}{2!} + \frac{(x.\,l\,a)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

Wir wollen nun noch zeigen, wie die verschiedenen Logarithmen-Systeme in einander übergeführt werden können. Bezeichnen wir zu dem Zweck den natürlichen Logarithmus einer Zahl N mit n und den gemeinen Logarithmus derselben Zahl mit g. Also:

$$\log N = g$$

und

$$l.N = n.$$

Dafür kann man wiederum schreiben:

$$10^g = N,$$

$$e^n = N.$$

Also folgt:

27) $$10^g = e^n.$$

Logarithmieren wir 27) also:

$$g\,l.10 = n\,l\,e$$

und bedenken, daß $l\,e = 1$ ist, dann ergiebt sich unmittelbar:

$$g = \frac{1}{l\,10} \cdot n.$$

In den Tafeln für die natürlichen Logarithmen findet man $l.10 = 2.30259$. Wir erhalten daher für g:

28) $$g = \frac{1}{2.30259} \cdot n.$$

Führen wir die Division von $\frac{1}{2.30259}$ aus, so erhalten wir eine Zahl, die man den Modulus nennt und mit M bezeichnet.

$$M = 0.43429.$$

Der Modulus in 28) eingeführt giebt endlich die Beziehung:

29) $$g = M.n.$$

Wir gelangen somit zu der Regel:

Der gemeine Logarithmus g von einer Zahl N ist gleich dem natürlichen Logarithmus von derselben Zahl multipliziert mit dem Modulus.

Formen wir 29) noch n um, dann ergiebt sich:

30) $$n = \frac{g}{M}$$

und die Regel lautet:

Der natürliche Logarithmus von einer Zahl N ist dem gemeinen Logarithmus der gleichen Zahl gleich, wenn man ihn durch den Modulus dividiert.

Wie die Logarithmen wirklich berechnet wurden zu erklären, ist in diesem der Praxis gewidmeten Buche nicht notwendig, da wir sie in den Tafeln vorfinden.

Zweiter Teil.

Die Differentialrechnung.

Drittes Kapitel.

Die allgemeine Lehre von den Funktionen.

10. Definitionen.

Verbindet man zwei Größen durch ein Gleichheitszeichen mit einander und legt der einen Größe nacheinander verschiedene Werte bei, so erhält dadurch in jedem Falle auch die andere Größe bestimmte Werte. Die eine Größe ist von der anderen abhängig. Eine solche Gleichung nennt man eine Funktionsgleichung. So ist z. B.

$$1)\qquad y = 2x$$

eine Funktionsgleichung. Setzt man nach der Reihe in dieselbe für x,

$$x = 1,\quad 2,\quad 3. \ldots$$

dann erhält man für y

$$y = 2,\quad 4,\quad 6, \ldots$$

Die Größe x, deren Wert man beliebig wählte, nennt man die unabhängige Veränderliche oder das Argument. Die Größe y, die durch x bestimmt wurde, be-

zeichnet man als die abhängige Veränderliche oder als die Funktion von x.

Die Gleichung 1) wird daher gelesen: „y ist eine Funktion von 2x".

Solche Funktionsgleichungen oder kurz Funktionen lehrt die Trigonometrie, die analytische Geometrie und auch schon die Elementargeometrie kennen. Funktionen sind z. B.

$$\text{a)}\qquad y = \sin x,$$

$$\text{b)}\qquad y = 2px,$$

$$\text{c)}\qquad y = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Setzt man in sin x für x nach und nach verschiedene Werte, dann erhält man für y die verschiedenen Funktionswerte. Also: $y = \sin 30^\circ$ ergiebt $y = \frac{1}{2}$; $y = \sin 90^\circ$ ergiebt $y = 1$. Werden in den Ausdruck b) für x eine Folge von Werten eingefügt, die entsprechenden Werte von y bestimmt und diese in ein Koordinatensystem gezeichnet, dann entsteht, wie die analytische Geometrie zeigt, eine Parabel. Aus Gleichung c) erkennt man endlich, daß der Inhalt einer Kugel von der Größe des Radius bestimmt wird.

Auch die Physik und die Technik geben Beispiele für den Funktionsbegriff. So ist die Spannkraft des Dampfes eine Funktion der Temperatur; die Schwingungsdauer eines Pendels eine Funktion seiner Länge; die Kraft eines Elektromagneten eine Funktion der Stromstärke und der Windungszahl.

Soll ganz allgemein angedeutet werden, daß y von x abhängt und x in irgend einer Form erscheint, dann pflegt man zu schreiben:

$$2)\quad y = f(x); \quad y = F(x); \quad y = \varphi(x); \quad y = \psi(x) \text{ u. s. f.}$$

und man liest „y ist eine Funktion von x".

Es ist nun leicht einzusehen, daß auch wiederum in jedem solchen Falle x als eine Funktion von y betrachtet werden

kann. Sei z. B. $U = 2r\pi$, d. h. der Umfang eines **Kreises**, ist eine Funktion des Radius; dann ist auch der **Radius** eine Funktion des Umfanges. Oder allgemein: Ist:

$$U = f(r),$$

dann ist auch

$$r = F(U).$$

Geben wir noch ein Beispiel aus der Algebra und **zwar** aus der Logarithmenlehre. Man schreibt bekanntlich:

$$y = 10^x,$$

so ergiebt sich sofort die Umkehrung:

$$x = \log^{10} y.$$

11. Die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen.

Von Wichtigkeit für die späteren Untersuchungen ist **die** Umkehrung der trigonometrischen Funktionen, also die Umkehrung von sin x, cos x, u. s. w. In der höheren Mathematik versteht man in diesen Funktionen unter x nicht **den** Winkel, sondern das zugehörige Bogenstück eines Kreises für den Radius, der der Einheit gleich ist. Die Formel für den Umfang des Kreises ist bekanntlich $2r\pi$ und der Zentriwinkel, welcher diesem größten Bogenstück gegenüberliegt, beträgt 360°. Setzt man nun, wie angegeben, $r = 1$, dann findet sich, daß einem Winkel von 360° das Bogenstück 2π gegenüberliegt. Somit liegt dem Winkel von einem Grad das Bogenstück gegenüber, das um $\frac{1}{360}$stel kleiner ist. Also 1° entspricht dem Bogenstück von $\frac{2\pi}{360}$,

$$\frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{180°} = \frac{3.14159\ldots}{180°} = 0.017453,$$

dem Winkel von einem Grad entspricht das Bogenstück: 0.017453. Es folgt somit unmittelbar, daß einem Winkel von a Grad ein Bogenstück von $\frac{\pi a}{180°} = 0.017453 \,.\, a$ gegenüber liegt.

Übertragen wir nun diese Auseinandersetzungen anschaulich in das Geometrische. (Siehe Fig. 1.)

Setzen wir das Bogenstück AB gleich x, dem der

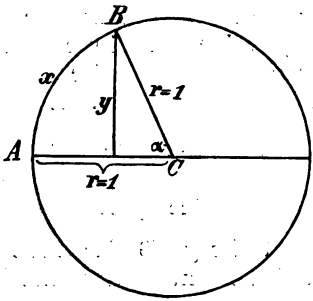


Fig. 1.

Winkel α gegenüberliegt, dann können wir nach unseren Untersuchungen schreiben:

$$AB = x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}.$$

Für $r = 1$ ist, wie die Trigonometrie lehrt und unter Berücksichtigung des eben Erörterten $y = \sin x$. Es ist also x dasjenige Bogenstück, dessen Sinus gleich y ist. Um das anzudeuten, schreibt man:

$$x = \text{arc} \sin y$$

und liest: „x ist gleich arcus sinus y“.

Merken wir noch:

3) Wenn $y = \cos x$, dann ist $x = \text{arc} \cos y$,
$y = \text{tang}\, x$, „ „ $x = \text{arc}\, \text{tang}\, y$,
$y = \cot x$, „ „ $x = \text{arc} \cot y$.

Diese Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen nennt man cyklometrische Funktionen.

12. Die Funktionsarten.

Die Funktionen, die wir bisher betrachteten, waren nach der einen Veränderlichen, und zwar zumeist nach y aufgelöst, z. B. $y = \sin x$. Man nennt solche Funktionen entwickelte oder explizite Funktionen von x.

Es kommt aber auch vor, daß eine Funktion nicht nach einer Veränderlichen aufgelöst ist, z. B.:

$$y^2 - axy + b = 0$$

oder

$$x^y + \sin x + 3x = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Man bezeichnet hier y als eine unentwickelte oder implizite Funktion von x. — Allgemein schreibt man:

$$4) \quad f(x, y) = 0; \quad F(x, y) = 0; \quad \varphi(x, y) = 0; \quad \psi(x, y) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Funktionen teilt man auch in algebraische und in transcendente Funktionen ein.

Man bezeichnet y als eine algebraische Funktion, wenn der Ausdruck, der y gleichgesetzt wird, gebildet ist durch die Operationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division, der Potenzierung oder der Radizierung. Zum Beispiel:

$$y = 3x^2 + 4x - 2,$$

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}.$$

Diese Ausdrücke sind algebraische Funktionen.

Sämtliche anderen Funktionen, die unter der Form von Logarithmen, als Potenzen mit veränderlichen Exponenten oder als trigonometrische Ausdrücke erscheinen, heißen transcendente Funktionen. Zum Beispiel:

$$y = \tan g\, x,$$
$$y = a^x,$$
$$y = \log x.$$

Diese Ausdrücke stellen transscendente Funktionen dar.

Auch die algebraischen Funktionen zerfallen nochmals. Man teilt sie in rationale und irrationale Funktionen ein. Es ist $y = bx + c$ eine rationale, $y = \sqrt{2bx + c}$ eine irrationale Funktion.

Häufig spricht man in der Analysis auch von:

Alternierenden Funktionen. Darunter versteht man Funktionen aus mehreren Veränderlichen, die, wenn man zwei Veränderliche mit einander vertauscht, wohl ihren absoluten Wert behalten, aber ihr Vorzeichen verändern, z. B.

$$x - y;\ \log\left(\frac{x}{y}\right);\ (x - y)(y - z)(x - z).\ \text{ꝛc.}$$

13. Darstellung der Funktionen.

Man kann, wie die analytische Geometrie lehrt, mittels eines Koordinaten-Systems eine Funktion bildlich darstellen. Hierfür gaben wir schon unter 10. die entsprechenden Beispiele. Arithmetisch werden die Funktionen ebenfalls ausgewertet, und häufig in Zahlentabellen die Ergebnisse zusammengestellt. Beispiele hierfür sind die logarithmischen und die trigonometrischen Tafeln.

14. Die Grenzen der Funktion.

Nähert sich eine veränderliche Größe x immer mehr einer bestimmten konstanten Größe c, bis endlich der Unterschied zwischen beiden verschwindet, d. h. nicht mehr angebbar ist, so bezeichnet man die konstante Größe c als die Grenze der Veränderlichen. Wir wiesen schon in 3. darauf hin, daß die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}$$

für $n = \infty$ den Wert „1" ergiebt. Man bezeichnet dann 1 als die Grenze (limes) der geometrischen Reihe und schreibt:

$$1 = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}\right\}$$

und liest: Eins ist gleich limes $\cdot \left\{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right\}$ für $n = \infty$.

Auch auf die unendlichen Dezimalbrüche haben wir in 3. aufmerksam gemacht. Der Dezimalbruch:

$$0.33333\ldots.$$

nähert sich z. B., wie bekannt, für eine sehr große Zahl von Stellen immer mehr dem Bruche $^1/_3$, wie man sich durch direkte Division unmittelbar überzeugen kann. Man kann daher schreiben:

$$^1/_3 = \lim .\ 0.33333\ldots.$$

Es ist $^1/_3$ die Grenze des unendlichen Dezimalbruches. Das wird noch klarer, wenn man den Dezimalbruch in eine Reihe auflöst und schreibt:

$$^1/_3 = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots\cdots + \frac{3}{10^n}\right\}.$$

In ihr ist $^3/_{10}$ das Anfangsglied und $^1/_{10}$ der Quotient.

Ein anderes instruktives Beispiel giebt die Trigonometrie. Es ist:

$$5)\qquad \lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

d. h. die Grenze für $\sin x$, durch den Bogen x, ergiebt für $x = 0$ den Wert 1. (Siehe Fig. 1.)

Aus Abschnitt 11 und Fig. 1 sahen wir, daß man setzen kann: $y = \sin x$. Das besagt, daß x der Bogen ist, dessen Sinus gleich y ist. Dann kann man für den vorstehenden Ausdruck 5) auch schreiben: „$\frac{y}{x}$".

Also: $$\frac{\sin x}{x} = \frac{y}{x}.$$

Die Figur läßt unmittelbar erkennen, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden muß. Im Augenblick des Verschwindens ist also: $\frac{\sin x}{x} = 1$. — Man möge sich hierbei recht klar machen, daß nicht der Zeitpunkt gemeint ist, wo x schon Null geworden ist, sondern der Augenblick kurz vorher.

Auch in der Geometrie erscheint bereits der Begriff der Grenze und in Verbindung damit die Begriffe unendlich groß und unendlich klein. So denkt man sich bekanntlich bei der Bestimmung des Kreisumfanges um und in den Kreis ein reguläres Vieleck konstruiert. Beide fallen zusammen, wenn ihre Seitenzahl „unendlich groß" wird. Die Kreislinie selbst stellt die Grenze der Vielecke dar. Ähnliche Überlegungen werden angestellt bei der Ableitung der Kugeloberfläche sowie bei der Bestimmung der Inhaltsformeln für den Kreis und die Kugel.

Unabweisbar drängt sich uns hier auch der Begriff des unendlich-Kleinen auf. Nähert sich eine Größe der Grenze Null, dann bezeichnet man sie als unendlich klein. In der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \quad , \frac{1}{2^n} \text{ wird } \frac{1}{2^n}$$

für $n = \infty$ sofort:

$$\frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

oder unendlich klein.

Auch bei der Bestimmung des Kreisumfanges wird in dem Augenblick, wo das eingeschriebene und das umschriebene Vieleck in der Kreislinie zusammenfallen, jede ihrer Seiten unendlich klein.

Mit dem Begriff der Grenze sind somit die Begriffe des unendlich Großen und unendlich Kleinen durchaus verbunden.

15. Die Stetigkeit der Funktionen.

Man denke sich eine Funktion:

6) $$y = f(x)$$

geometrisch durch eine Kurve dargestellt, dann wird in den meisten Fällen jede kleine Änderung von x auch eine kleine Änderung von y herrufen. Die Kurve erscheint, wenn man sie mit Hilfe der ermittelten Werte konstruiert, als eine Folge sehr eng an einander liegender Punkte. Eine solche Funktion und ihre bildliche Darstellung, die sich in der geschilderten Weise gleichmäßig entwickelt, nennt man eine stetige oder kontinuierliche Funktion resp. Kurve.

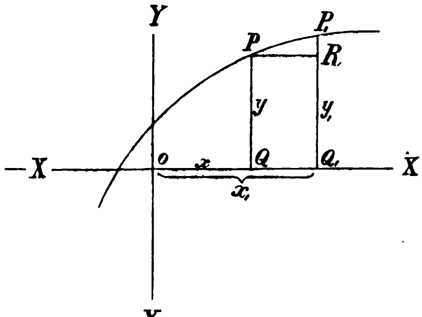


Fig. 2.

Auf der vorstehenden Linie haben die sehr nahe an einander liegenden Punkte P und $P_,$ die Koordinaten x y bezw. $x_, y_,$. Ändert sich x um $QQ_,$, dann muß sich auch y um $P_,R$ ändern. Wenn bei sehr kleinem $QQ_,$ auch $P_,R$ sehr klein ist, dann ist die Funktion und ihre Kurve stetig.

Stetige Funktionen sind z. B.:

$$y = ax;\ y = \sin x;\ y = \cos x;\ y = \sqrt{x}.$$

Auch $y = x^n$ ist eine stetige Funktion, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Das gleiche gilt für $y = \log x$ für das Intervall von $x = 0$ bis $x = \infty$.

Setzt man in die Funktion $y = \frac{a}{x}$ den Ausdruck $x = 0$, dann wird $y = \frac{a}{0} = \infty$. Der Wert der Funktion wird also für $x = 0$ unendlich groß, und der Weg der entsprechenden Kurve wird hier plötzlich und unvermittelt unterbrochen. Funktionen dieser Art heißen: diskontinuierliche oder unstetige Funktionen. Diskontinuierliche Funktionen sind z. B. noch:

$$y = \frac{a}{b - x} \text{ für } x = b.$$

$$y = \cot x \text{ für } x = 0;\ 180^\circ \text{ rc.}$$

Bei der Rechnung mit Funktionen hat man vor allen Dingen zu untersuchen, ob sie stetig sind und, gegebenen Falls, die Werte zu ermitteln, für welche sie unstetig werden.

Viertes Kapitel.

Die Entwickelung der Differentialformeln.

16. Der Differentialbegriff.

Man zeichne eine Linie, die durch die stetige Funktion

7) $$y = f(x)$$

gegeben ist. (Siehe Fig. 3 S. 30.)

Seien zwei Punkte der Kurve mit P und $P_,$ bezeichnet. Ihre Koordinaten seien x, y bezw. $x_,$, $y_,$. Man verbinde die Punkte durch die Sekante $P, P_,$, die mit der Abscisse X den Winkel β bildet. Sodann ziehe man durch den Punkt P parallel zur X-Achse eine Linie, die $P_, Q_,$ $(= y_,)$ in R schneidet. Es ist dann

8) $$\tan g\, \beta = \frac{P_, R}{P R}.$$

Aus der Figur ergiebt sich unmittelbar, daß man schreiben kann:

$$P_, R = y_, - y$$

und

$$PR = x_, - x.$$

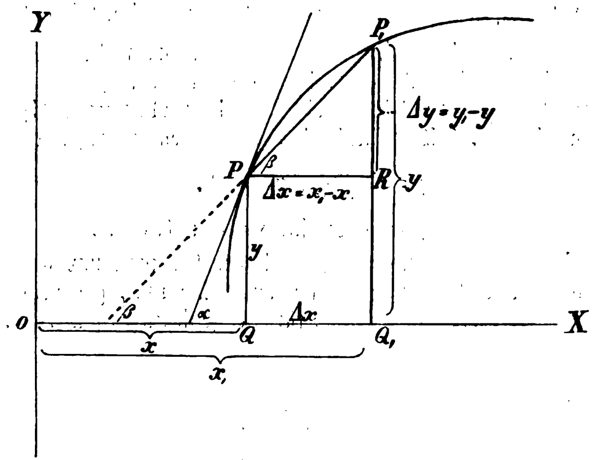


Fig. 3.

Es ist nun gebräuchlich für

$$y_, - y = \triangle y$$

und

$$x_, - x = \triangle x$$

zu setzen.

Dann geht 8) über in:

9) $$\operatorname{tang} \beta = \frac{y_, - y}{x_, - x} = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Man lasse nun den Punkt $P_,$ sich auf den Punkt P zu bewegen, dann werden $\triangle y$ und $\triangle x$ immer kleiner. Während dieses Vorganges wird sich die Sekante $P P_,$ in der dem Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung (β wird größer) um P drehen. In dem Augenblick, wo das Kurvenstück $PP_,$

verschwindend klein geworden ist, sind auch $\triangle y$ und $\triangle x$ verschwindend klein geworden. Gleichzeitig fällt die Sekante mit der Tangente im Punkte P zusammen, die mit der Abscisse den Winkel α macht. Der Winkel β ist in den Winkel α übergegangen.

Es ist gebräuchlich, die Differenzen $\triangle x$ und $\triangle y$, wenn sie verschwindend klein geworden sind und sich daher der Grenze Null nähern, mit **dx** und **dy** zu bezeichnen. Man nennt dann die neuen Ausdrücke **Differentiale**.

Wir setzen nun:

10) $$\operatorname{tang} \alpha = \lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}.$$

Den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ nennt man den **Differential-quotienten.**

Der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ ist somit gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente an einem Punkte der durch die Funktion bestimmten Kurve mit der Abscissenachse macht.

Da die geometrische Tangente die Richtung einer Linie in dem betreffenden Punkte angiebt, so wird man durch die Differentialquotienten die Richtungsänderungen an den einzelnen Stellen einer Kurve feststellen können. Man ist daher in dieser Weise fähig zu ermitteln, wie die Kurve verläuft; ob sie konvex oder konkav gegen eine Koordinaten-achse ist, wo ihre höchsten und tiefsten Punkte liegen und dergl. mehr. Schon allein diese Überlegung giebt eine Vorstellung von der Wichtigkeit der Differentialrechnung, deren Aufgabe es ja an erster Stelle ist, die Differentialquotienten der Funktionen zu bestimmen. Wir wollen zunächst zeigen, wie sich aus dem Differentialquotienten einer gegebenen Funktion erkennen läßt, ob die ihr entsprechende Kurve steigt oder fällt in Beziehung zur Abscissenachse.

In dem einfachsten Falle, den wir im Vorstehenden behandelten (siehe die Figur 3), war der Winkel α spitz; die

trigonometrische Tangente desselben ist somit positiv. Wir ziehen daraus sofort den Schluß: daß die Kurve dann über der Abscissenachse mit wachsendem x sich erhebt und steigt, wenn der Differentialquotient positiv ist.

Weiter wissen wir aus der Trigonometrie, daß die Tangente eines stumpfen Winkels negativ ist. Das giebt uns den

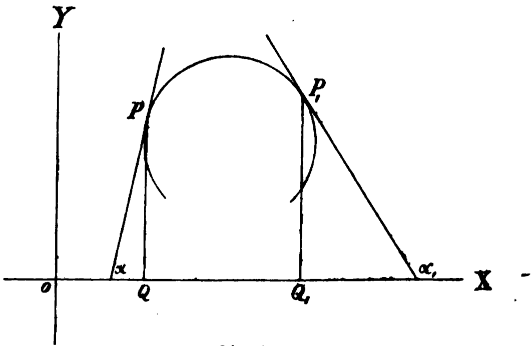


Fig. 4.

Satz. Die Kurve fällt bei wachsendem x gegen die Abscissenachse, wenn der Differentialquotient negativ erscheint.

Die Figur 4 giebt für die beiden Sätze eine gute Anschauung.

17. Die allgemeine Bestimmung des Differentialquotienten.

Denken wir uns die Funktion:

11) $$y = f(x)$$

wiederum als Kurve dargestellt. (Siehe Fig. 3 S. 30.)

Es nehme die Abscisse x des Punktes P um die kleine Größe $\triangle x$ zu, dann wird auch y um die kleine Größe $\triangle y$ zunehmen. Man erhält dann aus 11):

12) $$y + \triangle y = f(x + \triangle x).$$

Will man nunmehr $\triangle y$ erhalten, dann hat man nur Gleichung 12) von Gleichung 11) zu subtrahieren. Das ergiebt:

13) $$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$

Wir dividieren jetzt die Gleichung 13) durch $\triangle x$, so folgt:

14) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Nähert sich $\triangle x$ der Grenze Null, dann geschieht das Gleiche mit $\triangle y$ und es geht $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ in den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ über. Wir schreiben daher:

15) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Für den Differentialquotienten einer Funktion $f(x)$ schreibt man wohl auch $f'(x)$ oder $\frac{d.f(x)}{dx}$.

Dann ergiebt sich:

15a) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x) = \frac{d.f(x)}{dx}.$$

Es sollen nun der Reihe nach die Differentialquotienten für die einzelnen Funktionen entwickelt werden.

18. Bestimmung des Differentialquotienten für eine Potenz.

Satz I. Wenn eine Funktion $y = x^m$ gegeben ist, in der m eine beliebige reelle Zahl ist, dann wird der Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1}.$$

Beweis. Wir schreiben:

16) $$y = x^m.$$

Es wächst x um $\triangle x$ und somit auch y um $\triangle y$, dann geht 16) über in:

17) $$y + \triangle y = (x + \triangle x)^m.$$

Entwickeln wir die rechte Seite der Gleichung 17) nach dem binomischen Lehrsatze in Abschnitt 1. Also:

18) $$y + \triangle y$$
$$= x^m + m x^{m-1} \triangle x + \frac{m\,(m-1)}{2!} x^{m-2} \triangle x^2 + \cdots$$

Wir subtrahieren nun um $\triangle y$ zu erhalten 16) von 18), so folgt:

19) $$\triangle y = m x^{m-1} \triangle x + \frac{m\,(m-1)}{2!} x^{m-2} \triangle x^2 + \cdots$$

Dividieren wir nun, wie in Abschnitt 17, Gleichung 14) durch $\triangle x$ um den Quotienten zu erhalten, dann wird:

20) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m x^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2!} \triangle^{m-2} \triangle x + \cdots$$

Nähert sich jetzt $\triangle x$ der Grenze Null, dann werden alle Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung 20), die mit $\triangle x$ behaftet sind, auch gleich Null; $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ geht über in $\frac{dy}{dx}$ und man erhält, wie behauptet wurde:

21) $$\frac{dy}{dx} = m \,.\, x^{m-1}.$$

Zusatz. Sei in der Funktion:

$$y = x^m, \quad m = 0,$$

dann ist:

22) $$y = x^0 = 1,$$

und bildet man hieraus den Differentialquotienten, dann erhält man Null. Also:

23) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,.\,(x^0)}{dx} = \frac{d(1)}{dx} = 0.$$

Der Differentialquotient aus einer konstanten Zahl ist immer gleich Null, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man dieselbe Operation ausführt. Ist $y = a$, dann ist auch

24) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a)}{dx} = 0.$$

Hieraus folgt, daß zwei Funktionen, die sich nur durch eine **Konstante** unterscheiden, denselben Differentialquotienten haben müssen. — Werden endlich in einer Funktion mehrere Ausdrücke durch + oder — Zeichen mit einander verbunden, dann nimmt man den Differentialquotienten für jeden einzelnen Ausdruck.

19. Beispiele.

a) Es ist: $y = x^2$, dann ergiebt sich nach dem Vorstehenden:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

b) Es ist: $y = x^9$, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = 9x^8.$$

c) Es sei: $y = 4x^3 + 2x^2 + 5$, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = 3 . 4 . x^2 + 2 . 2x$$
$$= 12x^2 + 4x.$$

d) Es sei: $y = 5x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6$, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = 4 . 5 . x^3 + 3 . 3x^2 - 2 . 5x$$
$$= 20x^3 + 9x^2 - 10x.$$

e) Es sei: $y = 4x^{1/2} - 3x^{2/3} + 6$, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} 4x^{1/2-1} - \frac{2}{3} \cdot 3x^{2/3-1}$$

$$= 2x^{-1/2} - 2x^{-1/3}$$

$$= \frac{2}{x^{1/2}} - \frac{2}{x^{1/3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

f) Es sei: $y = \frac{5}{6\sqrt[4]{x^3}} + \frac{4}{6x^2} + 9$

$= \frac{5}{6}x^{-3/4} + \frac{2}{3}x^{-2} + 9$, dann wird:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}x^{-7/4} - 2 \cdot \frac{2}{3}x^{-3}$$

$$= -\frac{15}{24}x^{-7/4} - \frac{4}{3}x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{15}{24 \cdot x^{7/4}} - \frac{4}{3x^3}.$$

g) Es sei: $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{4}x^{2/3}$. Also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x^{-1/3} = \frac{1}{2}x^{-1/3} = \frac{1}{2x^{1/3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}.$$

h) Es sei: $y = (3x - 5)(x^2 + 10x - 1)$. In diesem Falle multipliziert man die Klammer aus. Also:

$$\begin{aligned} y = 3x^3 - 5x^2 & \\ + 30x^2 - 50x & \\ - 3x + 5 & \end{aligned}$$ oder

$$y = 3x^3 + 25x^2 - 53x + 5. \qquad \text{Also:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 50x - 53.$$

i) Nehmen wir endlich noch ein Beispiel zu Gleichung 24) und dem Folgenden. — Gegeben seien:

$$y = 5x^2 - 7x \quad \text{und} \quad y_1 = 5x^2 - 7x + 4.$$

Dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = 10x - 7 \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx} = 10x - 7.$$

20. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \sin x$.

Satz II. Ist eine Funktion $y = \sin x$ gegeben, dann ist der Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos . x.$$

Beweis. Wir schreiben:

25) $$y = f(x) = \sin x.$$

Es nimmt x um $\triangle x$ und y um $\triangle y$ zu, dann ergiebt sich:

26) $$y + \triangle y = f(x + \triangle x) = \sin (x + \triangle x).$$

Wir subtrahieren Gleichung 25) von 26). Also:

27) $$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = \sin (x + \triangle x) - \sin x.$$

Schreiben wir der Kürze halber für:

$$f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle f(x),$$

dann geht 27) über in:

27a) $$\triangle y = \triangle f(x) = \sin (x + \triangle x) - \sin x.$$

Zur weiteren Umformung erinnern wir uns der bekannten trigonometrischen Beziehung:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 . \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und wenden sie auf 27a) an. So wird:

$$28)\qquad \triangle y = \triangle f(x) = 2\sin\left(\frac{x+\triangle x - x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+\triangle x + x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)\cdot\cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right).$$

Zur Vereinfachung setzen wir sodann:

$$2u = \triangle x,$$

so wird jetzt:

$$29)\qquad \triangle y = \triangle f(x) = 2\sin u \,.\, \cos(x+u).$$

Dividieren wir durch $\triangle x$ und entwickeln:

$$30)\qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{2\sin u\,.\,\cos(x+u)}{\triangle x}$$

$$= \frac{2\sin u\,.\,\cos(x+u)}{2u}$$

$$= \frac{\sin u}{u}\cdot\cos(x+u).$$

Es möge sich nun wiederum $\triangle x = 2u$ der Grenze Null nähern, dann ergiebt sich:

$$31)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\,.\,f(x)}{dx} = \lim_{u=0}\left\{\frac{\sin u}{u}\cdot\cos(x+u)\right\}$$

$$= \cos x \cdot \lim_{u=0} \cdot \frac{\sin u}{u}.$$

In Abschnitt 14 Gleichung 5) wurde nachgewiesen, daß

$$\lim_{u=0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

zu setzen ist. Wird das beachtet, so erhalten wir:

$$32)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\,.\,f(x)}{dx} = \cos x.$$

21. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \cos x$.

Satz III. Ist eine Funktion $y = \cos x$ gegeben, dann ergiebt der Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

Beweis. Der Beweis schließt sich der vorigen Ableitung eng an. In

33) $$y = f(x) = \cos x$$

lassen wir wiederum x um $\triangle x$ wachsen, dann folgt zunächst:

34) $$y + \triangle y = f(x + \triangle x) = \cos(x + \triangle x) \text{ und}$$

35) $$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle f(x) = \cos(x + \triangle x) - \cos x.$$

Diesmal verwenden wir natürlich die Formel:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Dann ergiebt sich:

36) $$\triangle y = \triangle f(x) = -2\sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)\sin\frac{\triangle x}{2}.$$

Wiederum $2u = \triangle x$ gesetzt.

37) $$\triangle y = \triangle f(x) = -2 . \sin(x + u)\sin u.$$

Dividieren wir durch $\triangle x$, so ergiebt sich:

38) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = -\frac{2\sin(x+u) . \sin u}{\triangle x} = -\frac{2\sin(x+u) . \sin u}{2u} = -\frac{\sin u}{u} \cdot \sin(x+u).$$

Es möge sich jetzt $\triangle x = 2u$ der Grenze Null nähern, dann erhalten wir:

39) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d . f(x)}{dx} = -\sin x . \lim_{u=0}\frac{\sin u}{u}$$

40) $$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\lim_{u=0} \cdot \frac{\sin u}{u} = 1.$$

22. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \log x$.

Satz IV. Ist eine Funktion $y = \log x$ gegeben, dann ist ihr Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}.$$

Beweis. Wir schreiben:

41) $$y = f(x) = \log x$$

und lassen in der gebräuchlichen Weise x um $\triangle x$ zunehmen. Also:

42) $$y + \triangle y = f(x + \triangle x) = \log(x + \triangle x).$$

Nunmehr erhalten wir aus der Differenz der Gleichungen 41) und 42):

43) $$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle f(x) = \log(x + \triangle x) - \log x.$$

Aus der Lehre von den Logarithmen ergiebt sich die Formel:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Demgemäß wird:

44) $$\triangle y = \triangle f(x) = \log\left\{\frac{x + \triangle x}{x}\right\} = \log\left\{1 + \frac{\triangle x}{x}\right\}.$$

Wir dividieren durch $\triangle x$:

45) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x} \cdot \log\left\{1 + \frac{\triangle x}{x}\right\}.$$

Durch eine leichte Substitution kann das Ziel schneller erreicht werden, daher schreiben wir:

$$\frac{\triangle x}{x} = \frac{1}{n}; \quad \triangle x = \frac{x}{n}.$$

In Gleichung 45) eingefügt:

46) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{n}{x} \cdot \log\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}.$$

Mit Hilfe der Beziehung $n \cdot \log a = \log a^n$ geht 46) über in:

47) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{1}{x} \cdot \log\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Nähert sich jetzt $\triangle x$ der Grenze Null, dann wird

$$\triangle x = \frac{x}{n}; \quad n = \frac{x}{\triangle x} = \frac{x}{0} = \infty; \quad n = \infty.$$

Und es folgt:

48) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot f(x)}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n=\infty} \cdot \log\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Durch eine einfache Herleitung kann endlich gezeigt werden, daß:

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828$$ *) ist.

Also:

49) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cdot (\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}.$$

Bei dieser Ableitung ist über die Basis des Logarithmen-Systems nichts vorausgesetzt. Sie ist also ganz beliebig.

---

*) Nach dem binomischen Lehrsatze ist:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots \text{ oder:}$$

$$= 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right) + \cdots$$

Da n, wie wir im Text sahen, unendlich wird, so werden alle Glieder, die n im Nenner haben, Null. Es bleibt also für die Grenze $n = \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots$$

$= e$. (Siehe Abschnitt 8. Gleich. 22.)

23. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = l\,x$.

Satz V. Ist eine Funktion $y = l\,x$ gegeben, dann ist ihr Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(l\,x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Beweis. Den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus kann man unmittelbar aus dem Differentialquotienten des vorstehenden Logarithmus mit allgemeiner Basis herleiten. Hierzu ist nur nötig, daß man zur Basis die Zahl e selbst wählt. Wie wir in Abschnitt 9 sahen, wird dann $\log e = 1$. Somit ergiebt sich:

50) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(l\,x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Vergleiche übrigens auch die anderen Auseinandersetzungen in Abschnitt 9.

Zusatz. Hat man, was aber in der höheren Mathematik nur sehr selten vorkommt, den Differentialquotienten vom gemeinen Logarithmus zu nehmen, den man gewöhnlich auch mit $\log x$ bezeichnet, so hat man den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus mit dem Modulus zu multiplizieren. Also:

51) $$\frac{d.(\log x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = M \cdot \frac{1}{x}.$$

24. Bestimmung des Differentialquotienten eines Produktes.

Wenn mehrere Funktionen von x gegeben sind, die die einzelnen Faktoren eines Produktes bilden, dann bedarf es besonderer Methoden, um den Differentialquotienten des Produktes zu finden.

Satz VI. Sei u eine Funktion von x und v eine andere Funktion von x und $y = u.v$, dann ist der Differentialquotient dieses Produktes:

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Beweis. Schreiben wir wiederum:

52) $$y = u . v.$$

In diesem Produkt ist:

53) $$u = \varphi(x) \text{ und } v = \psi(x).$$

Dann muß auch y selbst eine Funktion von x sein. Also:

54) $$y = f(x) \text{ und somit:}$$

55) $$y = f(x) = u . v = \varphi(x) . \psi(x).$$

Wie gebräuchlich lassen wir nun x um $\triangle x$ wachsen und verändern dementsprechend den Ausdruck 55):

56) $$y + \triangle y = f(x + \triangle x) = \varphi(x + \triangle x) . \psi(x + \triangle x).$$

Hiervon Gleichung 55) subtrahiert ergiebt:

57) $$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$$
$$= \varphi(x + \triangle x) . \psi(x + \triangle x) - \varphi(x) . \psi(x).$$

Um leicht zur Aufstellung des Differentialquotienten zu gelangen macht man einen Kunstgriff, den man sofort aus der folgenden Gleichung ersehen kann. Setzen wir hierbei, der Kürze halber, wieder:

$$f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle . f(x).$$

58) $$\triangle y = \triangle f(x) = \varphi(x + \triangle x) \psi(x + \triangle x)$$
$$- \varphi(x) \psi(x + \triangle x) + \varphi(x) \psi(x + \triangle x) - \varphi(x) . \psi(x).$$

Die rechte Seite der Gleichung 58) vereinfachen wir nun in der Weise, daß wir $\psi(x + \triangle x)$ und $\varphi(x)$ ausklammern. Dann geht 58) über in:

59) $$\triangle y = \triangle f(x) = \psi(x + \triangle x) \{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)\}$$
$$+ \varphi(x) \{\psi(x + \triangle x) - \psi(x)\}.$$

Wir dividieren durch $\triangle x$:

60) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$$
$$= \psi(x + \triangle x) \frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x} + \varphi(x) \frac{\psi(x + \triangle x) - \psi(x)}{\triangle x}.$$

Nähert sich jetzt $\triangle x$ der Null, dann werden die Ausdrücke nach der Reihe:

$$\lim_{\triangle x=0} \psi(x+\triangle x)=\psi(x)=v.$$

$$\lim_{\triangle x=0} \frac{\varphi(x+\triangle x)-\varphi(x)}{\triangle x}=\frac{d\,.\,\varphi(x)}{dx}=\frac{du}{dx},$$

$$\lim_{\triangle x=0} \frac{\psi(x+\triangle x)-\psi(x)}{\triangle x}=\frac{d\,.\,\psi(x)}{dx}=\frac{dv}{dx} \text{ und endlich}$$

$$\lim_{\triangle x=0} \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{dy}{dx}.$$

Setzen wir die so umgeformten Ausdrücke in 60) ein, dann ergiebt sich:

61) $$\frac{dy}{dx}=v\cdot\frac{du}{dx}+u\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Das Produkt von zwei veränderlichen Faktoren wird differentiiert, indem man jeden Faktor differentiiert, das Differential mit dem anderen Faktor multipliziert und die Produkte addiert.

Zusatz I. Durch die gleichen Untersuchungen kann man auch den Differentialquotienten ermitteln für ein Produkt, das aus drei oder mehr variabeln Faktoren besteht. — Sei:

62) $$y=F(x) \text{ und}$$

$$u=f(x);\quad v=\varphi(x);\quad w=\psi(x).\quad \text{Also:}$$

62a) $$y=u\,.\,v\,.\,w.$$

Dann ergiebt sich:

63) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u\,.\,v\,.\,w)}{dx}=v\,.\,w\frac{du}{dx}+u\,.\,v\,.\,\frac{dw}{dx}+u\,.\,w\frac{dv}{dx}.$$

Zusatz II. Besteht ein Produkt aus zwei Faktoren und ist der eine Faktor eine Funktion von x, der andere eine Konstante, dann ist der Differential-

quotient gleich dem Differentialquotienten der Funktion multipliziert mit der Konstanten. Sei:

64) $$y = a v,$$

dann folgt aus Gleichung 61):

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{da}{dx} + a \frac{dv}{dx}.$$

Da nun der Differentialquotient einer Konstanten a immer Null ist, so wird auch:

65) $$\frac{dy}{dx} = a \frac{dv}{dx}.$$

25. Beispiele.

Sei gegeben:

a) $$y = (1 + x^2)(1 - x^2).$$

Hier sei: $u = 1 + x^2$ und $v = 1 - x^2$,

also:

$$y = u . v$$

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

Es ist: $\frac{du}{dx} = 2x$ und $\frac{dv}{dx} = -2x$.

Setzen wir ein:

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x^2) . 2x + (1 + x^2) . -2x$$
$$= -4x^3.$$

Von der Richtigkeit der Lösung kann man sich hier leicht überzeugen, wenn man die Klammer auflöst, zusammenfaßt und differentiiert. — Es giebt:

$$y = (1 + x^2)(1 - x^2) = 1 - x^4.$$

Also: $$\frac{dy}{dx} = -4x^3.$$

b) Es sei: $y = \sin x . \cos x,$

also: $u = \sin x; \quad v = \cos x.$

Daher $\frac{dy}{dx} = \cos x \frac{d(\sin x)}{dx} + \sin x . \frac{d(\cos x)}{dx}.$

Nach Abschnitt 20 und 21 wird dann:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x . \cos x + \sin x . (- \sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x.$$

26. Der Differentialquotient von einem Bruch (Quotienten) soll gefunden werden.

Satz VI. Der Zähler und der Nenner soll je eine Funktion von x sein. Ist $y = \frac{u}{v}$, wo u und v Funktionen von x sind, dann wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Beweis. Wir schreiben:

66) $$y = f(x) = \frac{u}{v}$$

und: $u = \varphi(x); \quad v = \psi(x).$

So folgt zunächst:

67) $$y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Nun lassen wir in der gewohnten Weise x um $\triangle x$ ꝛc. wachsen. Dann ergiebt sich:

68) $$y + \triangle y = f(x + \triangle x) = \frac{\varphi(x + \triangle x)}{\psi(x + \triangle x)}.$$

Wir bilden die Differenz und erhalten $\triangle y$:

69) $$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle f(x) = \frac{\varphi(x + \triangle x)}{\psi(x + \triangle x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

oder:

70) $$\triangle f(x) = \frac{\varphi(x + \triangle x) \cdot \psi(x) - \varphi(x)\psi(x + \triangle x)}{\psi(x + \triangle x) \cdot \psi(x)}.$$

Jetzt dividieren wir Gleichung 70) durch $\triangle x$. So giebt es, wenn wir geschickt ordnen:

71) $$\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{1}{\psi(x + \triangle x)\psi(x)} \cdot \frac{\varphi(x + \triangle x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x + \triangle x)}{\triangle x}$$

und:

72) $$\psi(x + \triangle x)\psi(x) \cdot \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{\varphi(x + \triangle x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x + \triangle x)}{\triangle x}.$$

Um nun leicht zu dem gewünschten Ergebnis zu kommen, addieren und subtrahieren wir zu dem vorstehenden Ausdruck das Produkt: $\varphi(x) \cdot \psi(x)$. — Das ergiebt:

73) $$\psi(x + \triangle x)\psi(x) \cdot \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{\varphi(x + \triangle x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x) - \varphi(x) \cdot \psi(x + \triangle x) + \varphi(x) \cdot \psi(x)}{\triangle x}$$
$$= \psi(x) \frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x} - \varphi(x) \frac{\psi(x + \triangle x) - \psi(x)}{\triangle x}.$$

Nähert sich endlich $\triangle x$ der Null, dann werden die einzelnen Ausdrücke in Gleichung 73):

$$\lim_{\triangle x = 0} \psi(x + \triangle x) = \psi(x) = v,$$
$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \frac{df(x)}{dx},$$

$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{\varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)}{\triangle x} = \varphi'(x) = \frac{d \,.\, \varphi(x)}{dx} = \frac{du}{dx},$$

$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{\psi(x + \triangle x) - \psi(x)}{\triangle x} = \psi'(x) = \frac{d \,.\, \psi(x)}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$

Diese Werte setzen wir jetzt in Gleichung 73) ein. Dann wird unter Beobachtung, daß $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ ist:

$$v \cdot v \cdot \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}$$

und endlich:

$$74) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist somit gleich dem Nenner mal dem Differentialquotienten des Zählers, vermindert um den Zähler mal dem Differentialquotienten des Nenners; die Differenz dividiert durch das Quadrat des Nenners.

27. Beispiele.

a) $$y = \frac{a - x}{a + x}.$$

Setzen wir:

$$u = a - x \quad \text{und} \quad v = a + x$$

und setzen in Formel 74) ein, nachdem bestimmt wurde:

$$\frac{du}{dx} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = 1,$$

dann folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a + x) \cdot -1 - (a - x) \cdot 1}{(a + x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a - x - a + x}{(a + x)^2}$$

$$= \frac{-2a}{(a + x)^2}.$$

b) Es sei gegeben:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Also: $u = \sin x; \quad v = \cos x.$

In Formel 74) eingesetzt, nach Bestimmung von:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x,$$

ergiebt:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \,.\, \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x},$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

c) Es sei: $y = \frac{a}{x^n} = \frac{u}{v}.$

Also:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n \,.\, 0 - a \,.\, n x^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$= -\frac{a n x^{n-1}}{x^{2n}} = -a n x^{n-1} \,.\, x^{-2n}$$

$$= -a n x^{-(n+1)}$$

$$= -\frac{a n}{x^{n+1}}.$$

d) Es sei: $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$

Also:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \sqrt{x}) \,.\, x^{-1/2} + (1 + \sqrt{x}) x^{-1/2}}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x} \,.\, (1 - \sqrt{x})^2}.$$

28. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = a^x$.

Satz VII. Der Differentialquotient der Exponentialfunktion $y = a^x$, in der a eine Konstante bedeutet, ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,.\,(a^x)}{dx} = a^x \,.\, la.$$

Beweis. Schreiben wir:

75) $$y = a^x,$$

und nehmen auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus, wodurch oft eine Ableitung vereinfacht wird, so folgt:

76) $$l.y = l(a^x) = x.l.a.$$

In Abschnitt 23 erhielten wir für den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Daraus:

$$dy = \frac{dx}{x}.$$

Vergegenwärtigen wir uns noch Abschnitt 24, Zusatz II, dann erhalten wir, wenn wir von Gleichung 76) links und rechts das Differential nehmen:

77) $$\frac{dy}{y} = dx\,la.$$

Um den Differentialquotienten zu erhalten, dividieren wir Gleichung 77) durch dx und setzen für y aus Gleichung 75) den Wert ein. Dann ist:

78) $$\frac{dy}{dx} = a^x . la.$$

29. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = e^x$.

Satz VIII. Der Differentialquotient der bestimmten Exponentialfunktion $y = e^x$ ist gleichfalls:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Beweis. Der Beweis ergiebt sich sehr einfach aus 28. Wir müssen nur in $y = a^x$ für a den Wert e als speziellen Fall einsetzen. Also:

79) $$y = e^x.$$

Der Differentialquotient für $y = a^x$ war:

$$\frac{dy}{dx} = a^x . l a.$$

Setzen wir nun $a = e$, dann wird:

$$\frac{dy}{dx} = e^x . l e.$$

Aus Abschnitt 9 wissen wir aber, daß $l e = 1$ ist. Daher:

80) $$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

30. Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \operatorname{tang} x$.

Satz IX. Der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{tang} x$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{tang} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Beweis. Siehe Abschnitt 27, Aufgabe b. Wir erhalten durch Anwendung der Quotienten-Regel dort unmittelbar:

81) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\operatorname{tang} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

31. Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \operatorname{cotang} x$.

Satz X. Der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{cotang} x$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\operatorname{cotang} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Beweis. Wie in 30 mit Hilfe der Quotienten-Regel zu ermitteln, da $\operatorname{cotang} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist.

Also:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x . (-\sin x) - \cos x . \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}.$$

Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, so folgt sofort:

82) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

32. Angabe der Differentialquotienten für $y = \sec x$ und $y = \operatorname{cosec} x$.

Satz XI. Die Differentialquotienten für die selten vorkommenden Funktionen $y = \sec x$ und $y = \operatorname{cosec} x$ wollen wir nicht weiter ableiten, sondern die Arbeit dem Leser überlassen und das Resultat hier nur hinschreiben. Also:

83) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\sec x)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \text{ und}$$

84) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Man hat sich bei der Ableitung nur daran zu erinnern, daß $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ und $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ist; und die Quotienten-Regel anzuwenden.

Wir wenden uns nun zur Ableitung der cyklometrischen Funktionen und verweisen nochmals auf ihre Bedeutung, die in Abschnitt 11 dargelegt wurde.

33. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \operatorname{arc} \sin x$.

Satz XII. Der Differentialquotient für $y = \operatorname{arc} \sin x$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\operatorname{arc} \sin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Beweis. Wie wir in Abschnitt 11 zeigten, ist die Umkehrung von $y = \operatorname{arc} \sin x$, der Ausdruck $x = \sin y$. Bilden wir von dem Ausdruck $x = \sin y$ den Differentialquotienten·

85) $$\frac{dx}{dy} = \cos y.$$

Kehren wir den Bruch um, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y},$$

wofür wir auch schreiben können:

86) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

Nun erhält man aus $x = \sin y$ sofort $x^2 = \sin^2 y$ und fügt man den neuen Wert ein, dann ist:

87) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

34. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \operatorname{arc} \cos x$.

Satz XIII. Der Differentialquotient der Funktion $y = \operatorname{arc} \cos x$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\operatorname{arc} \cos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Beweis. Er ist der gleiche wie in 33. Da $y = \operatorname{arc} \cos x$, die Umkehr $x = \cos y$ ergiebt, so differentiieren wir diesen Ausdruck. Also:

$$x = \cos y,$$

daher: $$\frac{dx}{dy} = -\sin y \text{ und:}$$

88) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Mit Hilfe einer bekannten trigonometrischen Formel:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}.$$

Da nun $\cos y = x$ ist:

89) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

35. Bestimmung des Differentialquotienten für $y = \text{arc tang}\, x$.

Satz XIV. Der Differentialquotient der Funktion $y = \text{arc tang}\, x$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\text{arc tang}\, x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Beweis. Wiederum setzen wir, da $y = \text{arc tang}\, x$ ist, den Ausdruck: $x = \text{tang}\, y$ und differentiieren. Daher:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}. \quad \text{Somit:}$$

90) $$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y.$$

In der Trigonometrie wird die leicht zu erweisende Relation abgeleitet:

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tang}^2 y}.$$

Wir erhalten demgemäß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\text{tang}^2 y}.$$

Setzen wir endlich für $\text{tang}^2 y$ den Wert x^2, dann ist:

91) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\text{arc tang}\, x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

36. Bestimmung des Differentialquotienten von $y = \text{arc cotang}\, x$.

Satz XV. Der Differentialquotient der Funktion $y = \text{arc cotang}\, x$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\text{arc cotang}\, x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Beweis. Wenn $y = \text{arc cotang}\, x$ ist, wird die Umkehrung: $x = \text{cotang}\, y$. Wir differentiieren:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y} \quad \text{und daraus:}$$

92) $$\frac{dy}{dx} = -\sin^2 y.$$

Es ist, wie die Trigonometrie lehrt:

$$\sin^2 y = \frac{1}{1 + \text{cotang}^2 y}.$$

Daher: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + \text{cotang}^2 y}$$

und da $x = \text{cotang}\, y$ ist:

93) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

37. Angabe der Differentialquotienten für die Funktionen $y = \text{arc sec}\, x$ und $y = \text{arc cosec}\, x$.

Satz XVI. Die Differentialquotienten für $y = \text{arc sec}\, x$ und $\text{arc cosec}\, x$ sind:

94) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\text{arc sec}\, x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

95) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(\text{arc cosec}\, x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Wir wollen die Ableitung dem Leser zur Übung überlassen.

Tafel der Differentialquotienten.

Die Funktion.	Der Differentialquot.	Die Funktion.	Der Differentialquotient.
1) $y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f^1(x) = d.f(x)$	12) $y = a^x$	$\frac{dy}{dx} = a^x . la$
2) $y = f(a)$	$\frac{dy}{dx} = 0$	13) $y = e^x$	$\frac{dy}{dx} = e^x$
3) $y = x^m$	$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$	14) $y = \text{arc} \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
4) $y = \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \cos x$	15) $y = \text{arc} \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
5) $y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\sin x$	16) $y = \text{arc tang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$
6) $y = \text{tang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$	17) $y = \text{arc cotang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$
7) $y = \text{cotang}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18) $y = \text{arc sec}\, x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
8) $y = \sec x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	19) $y = \text{arc cosec}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
9) $y = \text{cosec}\, x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	20) $y = u . v$	$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u . \frac{dv}{dx}$
10) $y = \log x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}$	21) $y = u . v . w$	$\frac{dy}{dx} = u . v . \frac{dw}{dx} + u . w . \frac{dv}{dx} + v w \frac{du}{dx}$
11) $y = lx$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$	22) $y = \frac{u}{v}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{v . \frac{du}{dx} - u . \frac{dv}{dx}}{v^2}$

Fünftes Kapitel.

Die Bildung der Differentialquotienten der Funktionen von Funktionen. Aufgaben.

38. Erläuterungen.

Es kommt sehr häufig vor, daß mehrere Funktionen mit einander verknüpft sind, von denen der Differentialquotient gebildet werden soll. Wir wollen das zunächst an einem Beispiele darlegen. Sei z. B.:

$$y = l . \sin x .$$

Um zum Ziel zu gelangen setzt man für sin x einen anderen einfachen Wert ein, also z. B.:

$$\sin x = u .$$

Dann geht die Gleichung über in:

$$y = lu .$$

Hiervon können wir sofort den Differentialquotienten bilden. Es ist:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \quad \text{und:} \quad dy = \frac{du}{u} .$$

Es kommt nun darauf an, du wirklich zu bestimmen. Da

$$u = \sin x$$

war, ist:

$$du = \cos x \, dx .$$

Somit ergiebt sich:

$$dy = \frac{du}{u} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x dx .$$

Also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x .$$

39. Allgemeine Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion von einer Funktion.

Wir wollen nun zeigen, wie das ganz allgemein möglich ist. Es sei:

1) $$y = F(z)$$

aber zugleich auch

2) $$z = f(x).$$

Dann erhalten wir den Ausdruck:

3) $$y = F\{f(x)\}.$$

Um den Ausdruck 3) differentiieren zu können, lassen wir, wie bereits vielfach ausgeführt, in 1) und 2) x um $\triangle x$ und z um $\triangle z$ wachsen. So ergiebt sich:

$$y + \triangle y = F(z + \triangle z)$$

und $$z + \triangle z = f(x + \triangle x).$$

In gewohnter Weise bilden wir nun die Ausdrücke $\triangle y$ und $\triangle z$.

4) $$\triangle y = F(z + \triangle z) - F(z) = \triangle F(z)$$ und

5) $$\triangle z = f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle f(x).$$

Nun dividieren wir 4) durch $\triangle x$. Daher:

6) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(z + \triangle z) - F(z)}{\triangle x} = \frac{\triangle F(z)}{\triangle x}.$$

Wir wollen nun die Gleichung 6) im Zähler und Nenner mit dem Ausdruck:

$$f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle z$$

in entsprechender Weise multiplizieren, so daß der Ausdruck:

7) $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(z + \triangle z) - F(z)}{\triangle z} \cdot \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

$$= \frac{\triangle F(z)}{\triangle z} \cdot \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$$

sich ergiebt. Nähert sich jetzt $\triangle x$ der Grenze Null, dann geht 7) unter Berücksichtigung der Gleichungen 4) und 5) über in:

8) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Wir erhalten also den Satz: **Der Differentialquotient einer Funktion von einer Funktion ist dem Produkte der Differentialquotienten der Funktionen gleich.**

40. Aufgaben.

a) Es sei:

$$y = \sin^2 x; \qquad \frac{dy}{dx} \text{ soll bestimmt werden.}$$

Lösung. Wir schreiben: $u = \sin x$. Also:

$$y = u^2$$

und daher: $\dfrac{dy}{du} = 2u; \qquad dy = 2u\,du.$

Da $u = \sin x$ ist, so ergiebt sich $du = \cos x\,dx$. Setzt man jetzt ein, so wird:

$$dy = 2u\,du = 2 . (\sin x) . \cos x\,dx.$$

Und: $\dfrac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$

b) Es sei:

$$y = (a + bx)^2; \qquad \frac{dy}{dx} \text{ zu bilden.}$$

Lösung. Man setzt:

$$u = (a + bx).$$

Also ergiebt sich: $y = u^2.$

Das Differential: $dy = 2u\,du$

und: $du = b . dx.$

Eingefügt: $dy = 2(a + bx) . b . dx.$

Also: $\dfrac{dy}{dx} = 2b(a + bx).$

c) Es sei:

$$y = \sqrt{3ax + x^2}; \qquad \frac{dy}{dx} = ?$$

Setzen wir: $u = 3ax + x^2$, so ergiebt sich:

$$y = \sqrt{u} = u^{1/2}.$$

Differentiiert:

$$dy = \frac{1}{2} u^{-1/2} du = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Bilden wir nun das Differential von $u = 3ax + x^2$,

$$du = (3a + 2x) dx.$$

Also:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a + 2x}{2\sqrt{3ax + x^2}}.$$

d) Es sei:

$$y = e^{\sin x}; \qquad \frac{dy}{dx} = ?$$

Wir setzen $u = \sin x$, also:

$$y = e^u$$

und differentiieren: $dy = e^u du$.

Bilden wir das Differential von $u = \sin x$,

$$du = \cos x dx.$$

So folgt:
$$\frac{dy}{dx} = (e^{\sin x}) . \cos x.$$

e) Es sei:

$$y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 4}; \qquad \frac{dy}{dx} = ?$$

Setzen wir:

$u = x^2 + 3x - 4$ und $du = (2x + 3) dx$

$v = x^2 - 3x + 4$ und $dv = (2x - 3) dx.$

Dann ist:
$$y = \frac{u}{v}.$$

Nach der Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 3x + 4)(2x + 3) - (x^2 - 3x - 4)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 4)^2}$$

$$= \frac{2x(8 - 3x)}{(x^2 - 3x + 4)^2}.$$

f) Es sei: $y = \cos(a + bx)$; $\frac{dy}{dx} = ?$

Wir setzen: $u = a + bx.$

Dann wird: $y = \cos u.$

Bilden wir nun die Differentiale:

$$dy = -\sin u\, du \quad \text{und} \quad du = b\, dx,$$

dann folgt: $dy = -\sin(a + bx) \,.\, b\,dx.$

Also: $\frac{dy}{dx} = -b \,.\, \sin(a + bx).$

g) Es sei: $y = \sqrt{1 + x} \,.\, \sqrt[3]{1 - x^2}.$

$$= (1 + x)^{1/2} \,.\, (1 - x^2)^{1/3}.$$

Hier können wir mit Hilfe der Formeln $y = u \,.\, v$ und

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

unmittelbar differentiieren. Also:

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x^2)^{1/3} \,.\, {}^1\!/_2 (1 + x)^{-1/2}$$

$$+ (1 + x)^{1/2} \,.\, {}^1\!/_3 (1 - x^2)^{-2/3} \,.\, (-2x)$$

$$= \frac{3 - 4x - 7x^2}{6(1 + x)^{1/2} \,.\, (1 - x^2)^{2/3}}$$

$$= \frac{3 - 4x - 7x^2}{6\sqrt{1 + x} \,.\, \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}$$

h) Es sei: $y = x^x; \quad \frac{dy}{dx} = ?$

Zuweilen, wie in diesem Falle, kann es praktisch sein, vor der Differentiierung rechts und links den natürlichen Logarithmus der Gleichung zu nehmen und erst dann zu differentiieren. Also:

$$l \,.\, y = x\,l\,x.$$

Differentiieren wir nun:

$$\frac{dy}{y} = l\,x \,.\, dx + x\frac{dx}{x}.$$

$$dy = dx \,.\, y(l\,x + 1)$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = x^x \,.\, (l\,x + 1).$$

i) Auf die gleiche Weise ist:

$$y = x^{\sin x} \text{ zu behandeln.}$$

Der Leser möge die Lösung selbst suchen, sie führt auf den Ausdruck:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \,.\, \left\{\frac{\sin x}{x} + \cos x \,.\, l\,x\right\}.$$

k) Es sei:

$$y = \operatorname{arc} \sin\left(\frac{x}{a}\right); \qquad \frac{dy}{dx} = ?$$

Lösung. Wir setzen:

$$u = \frac{x}{a},$$

also:

$$y = \operatorname{arc} \sin u.$$

Das Differential:

$$dy = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \text{ und } du = \frac{a\,dx}{a^2} = \frac{dx}{a}.$$

Also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

1) Es sei: $y = x^n \,.\, e^x; \quad \frac{dy}{dx} = ?$

Lösung. $u = x^n; \quad v = e^x.$ Also:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= x^n \,.\, e^x + e^x \,.\, n x^{n-1}$$

$$= e^x (x^n + n x^{n-1})$$

$$= e^x \,.\, x^{n-1}(x + n).$$

Nachfolgende Aufgaben möge der Leser selbständig zu lösen versuchen.

1) $y = x^3 \,.\, \sqrt{x}$ . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}.$

2) $y = \frac{a}{x^4}$ . . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{4a}{x^5}.$

3) $y = \frac{a}{\cos x}$ . . . . $\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$

4) $y = l \,.\, (x + \sqrt{a^2 + x^2})$ . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$

5) $y = (a + x^2)^3$ . . . . $\frac{dy}{dx} = 6x(a + x^2)^2.$

6) $y = \frac{\sqrt{a + bx}}{x}$ . . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{2a + bx}{2x^2\sqrt{a + bx}}.$

7) $y = e^{\arcsin x}$ . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}.$

8) $y = l \,.\, (l x)$ . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \,.\, l x}.$

9) $y = \sin(a + bx)$ . . . . $\frac{dy}{dx} = b \,.\, \cos(a + bx).$

10) $y = \frac{a - b\cos x}{a + b \,.\, \cos x}$ . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{2ab\sin x}{(a + b\cos x)^2}.$

11) $y = \arc\cos\left(\frac{a-x}{x}\right) \; \cdot \cdot \; \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{2ax-a^2}}.$

12) $y = l.(\operatorname{arc\,tg} mx) \; \cdot \cdot \cdot \; \frac{dy}{dx} = \frac{m}{(1+m^2x^2)\operatorname{arc\,tg} mx}.$

13) $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \; \cdot \cdot \cdot \cdot \; \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sqrt{8}.\sqrt{1-\cos x}}.$

14) $y = (\cos x)^{\sin x} \; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^{-1+\sin x}\left\{\cos^2 x\, l.(\cos x) - \sin^2 x\right\}.$$

15) $y = \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^x \; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\left\{l\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right\}.$

Sechstes Kapitel.

Die höheren Differentialquotienten.

41. Ableitung der höheren Differentialquotienten.

Im vierten Kapitel wurde auseinandergesetzt, wie man aus einer Funktion $y = f(x)$ den Differentialquotienten erhalten kann. Wir bezeichneten ihn mit:

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx} = f'(x).$$

Wie man sieht, ist der Differentialquotient wiederum eine Funktion von x. Man nennt ihn deshalb **die abgeleitete Funktion von x** und bezeichnet ihn **zumeist mit $f'(x)$**. Es leuchtet nun sofort ein, daß man auch mit der abgeleiteten Funktion die gleichen Überlegungen anstellen kann, wie mit der direkten, und daß man hierdurch zum **zweiten Differentialquotienten** gelangt. Es sei:

2) $$y = f(x)$$

und $$\frac{dy}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx} = f'(x).$$

Dann kann man auch schreiben:

3) $$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d.f'(x)}{dx} = f''(x).$$

Den Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ schreibt man gewöhnlich $\frac{d^2y}{dx^2}$ und nennt ihn den **zweiten Differentialquotienten**.

Daß der zweite Differentialquotient die vorstehende Form annehmen muß, tritt noch deutlicher hervor, wenn man vom Differential ausgeht. — Es sei:

2a) $$y = f(x)$$

und: $$dy = f'(x).dx.$$ (Siehe Gleich. 1.)

Differentiiert man nun noch einmal, so ergiebt sich:

3) $$d.[dy] = d[f'(x)]\,dx$$

und: $$d.[f'(x)] = f''(x)\,dx.$$

Somit folgt:

$$d.[dy] = f''(x)\,dx.dx = f''(x)\,dx^2.$$ Daher:

4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

In Gleichung 4) haben wir also den zweiten Differentialquotienten der Funktion x.

In der gleichen Weise kann man nun auch den dritten, vierten 2c. Differentialquotienten bilden. Es ist dann:

5) $$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x).$$

6) $$\frac{d\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = f''''(x).$$ 2c.

Wiederholt man die Ableitungen n mal, dann erhält man endlich den nten Differentialquotienten:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f^n(x). \tag{7}$$

Wir wollen nun die Bildung der höheren Differentialquotienten an einigen Aufgaben üben.

Aufgaben.

a) Es sei: $y = x^4.$

Dann erhalten wir nach der Reihe:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3 \,.\, 4 \,.\, x^2.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, x.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24.$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0.$$

b) Es sei: $y = x^m.$

Wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = m \,.\, x^{m-1}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Endlich:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

c) Es sei: $y = \sin x.$

Dann werden:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x.$$

Es ist also: $y = \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x.$

Wie man sieht, wiederholen sich die Werte. Der gleiche Vorgang findet sich beispielsweise auch bei $y = \cos x$.

d) Es sei:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Dann wird nach der Reihe:

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 . 3 . ax + 2b = 6ax + 2b.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 . 3 . a = 6a.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

e) Wir wollen nun noch die höheren Differentialquotienten für ein Produkt aus zwei Funktionen von x bilden. Es sei daher:

8) $y = u . v$ $\quad u = f(x)$, $\quad v = F(x).$

9) $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Differentiiere man nun jeden Teil der Summe für sich. Also:

$$d\left(u\frac{dv}{dx}\right)=u\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dx}$$

und:

$$d\left(v\frac{du}{dx}\right)=v\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Addiert, ergiebt das den zweiten Differentialquotienten:

10) $$\frac{d^2y}{dx^2}=u\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv\,.\,du}{dx\,.\,dx}+v\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Um den dritten Differentialquotienten zu erhalten, muß man wiederum in der gleichen Weise verfahren, dann ergiebt sich Gleichung:

11) $$\frac{d^3y}{dx^3}=u\cdot\frac{d^3v}{dx^3}+3\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+3\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dv}{dx}+v\frac{d^3u}{dx^3}.$$

Der Leser bemerkt wohl, daß hier das Gesetz der Binomial-Koeffizienten hervortritt.

42. Wenn Funktionen einander gleich sind, aber in ihren Formen sich von einander unterscheiden, dann sind auch ihre Differentialquotienten einander gleich.

Wir wollen den Satz hier zunächst an einem Beispiel erläutern. Es sei:

$$y=f(x)=(x+h)^4=x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4.$$

Nunmehr nehmen wir von diesen gleichen Ausdrücken die Differentialquotienten nach der Reihe:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=4(x+h)^3=4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=12(x+h)^2=12x^2+24xh+12h^2.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)=24(x+h)=24x+24h.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=f''''(x)=24=24.$$

Führen wir die Berechnung einer jeden Klammer aus, so werden wir finden, daß die entsprechenden Differentialquotienten einander gleich sind.

Siebentes Kapitel.

Die Reihen von Taylor und Mac-Laurin.

43. Vorbereitungen.

Gesetzt, es sei eine Funktion

1) $$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

gegeben. Es soll in derselben die Veränderliche x um die Größe h wachsen, dann erhält man mittels der einfachen bekannten algebraischen Operationen einen Ausdruck, der nach wachsenden Potenzen von h fortschreitet. Es wird:

2) $$f(x+h) = a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d.$$

Führen wir die Rechnung wirklich aus:

2a) $$\begin{aligned} f(x+h) = ax^3 &+ 3ax^2h &+ 3axh^2 &+ ah^3 \\ + bx^2 & &+ 2bxh &+ bh^2 \\ & &+ cx &+ ch \\ & & &+ d. \end{aligned}$$

Ordnen wir und fassen immer die Glieder mit gleichen Potenzen von h zusammen. So ergiebt sich:

2b) $$f(x+h) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c)h + (3ax + b)h^2 + ah^3.$$

44. Die Taylorsche Reihe.

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man leichter zum gleichen Ziele gelangen. Man erhält Methoden, durch die jede rationale ganze Funktion in eine Reihe entwickelt werden kann, die nach steigenden Potenzen fortschreitet, wie in 2b). — Vergleiche die Abschnitte 3 und 6.

Man kann sich also auch die Funktion f(x + h) in einen Ausdruck entwickelt denken, der nach Potenzen von h*) fortschreitet. Deuten wir das zunächst an:

3) $$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3.$$

Hier sind A, B, C, D selbst Funktionen von x.

*) h denke man sich als kleinen Zuwachs von x.

Wir wollen nun nach der Reihe die Differentialquotienten bilden:

4) $$f'(x+h) = B + 2Ch + 3Dh^2$$
$$f''(x+h) = 2C + 2 \, . \, 3D \, . \, h$$
$$f'''(x+h) = 2 \, . \, 3D.$$

Nähert sich nun h der Grenze Null, dann gehen nach einander die Ausdrücke 3) und 4) über in:

4a) $$f(x) = A$$
$$f'(x) = B$$
$$f''(x) = 2C$$
$$f'''(x) = 6 \, . \, D.$$

Und hieraus folgt:

5) $$A = f(x).$$
$$B = f'(x).$$
$$C = \frac{f''(x)}{2!}.$$
$$D = \frac{f'''(x)}{3!}.$$

Werden diese Ausdrücke in 3) eingesetzt, so folgt:

6) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} h^3.$$

Ist die Funktion nicht nur vom dritten, sondern vom nten Grade, so erhält man unmittelbar durch dieselben Operationen die Taylorsche Reihe:

7) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!} h^n.$$

Diese Gleichung ist in folgender Weise in Worte zu fassen: Eine jede ganze rationale Funktion läßt sich in eine Reihe entwickeln, von der das erste

Glied die Funktion selbst ist, jedes weitere Glied aber, durch den ersten, zweiten 2c. Differentialquotienten dargestellt, wird multipliziert mit h oder den folgenden Potenzen von h.

Wir wollen den Satz 7) zunächst auf das Beispiel 1) anwenden. Es war dort:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Somit ist nach der Reihe:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b; \quad \frac{f''(x)}{2!} = 3ax + b$$

$$f'''(x) = 6a; \quad \frac{f'''(x)}{3!} = a.$$

Setzen wir in 7) ein:

$$f(x+h) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c)h + (3ax + b)h^2 + ah^3.$$

Wie man sieht, entspricht dieser Ausdruck ganz der Gleichung 2b).

Von der Taylorschen Reihe lassen sich nun schöne Anwendungen machen. Wir wollen u. a. mit ihrer Hilfe den Binomischen Lehrsatz herleiten.

45. Herleitung des Binomischen Satzes.

Es sei die Funktion:

8) $y = x^m$ gegeben.

Wir setzen unseren Ausführungen in Abschnitt 44 entsprechend:

9) $f(x+h) = (x+h)^m.$

und bilden nach der Reihe die Differentialquotienten:

10) $$f'(x+h) = m(x+h)^{m-1}$$
$$f''(x+h) = m(m-1)(x+h)^{m-2}$$
$$f'''(x+h) = m(m-1)(m-2)(x+h)^{m-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f^m(x+h) = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.2.\ 1.$$

Wird nun wiederum h gleich Null, dann erhalten wir die Reihe der abgeleiteten Funktionen:

$$f(x) = x^m$$
$$f'(x) = m x^{m-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f^m(x) = m! -$$

Setzen wir diese Werte in Formel 7) ein, dann ist:

$$(x+h)^m = x^m + m \,.\, x^{m-1} \,.\, h + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{2!} \cdot h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}}{3!} \cdot h^3 + \cdots \frac{m!}{m!} \cdot h^m.$$

Setzt man $x = a$ und $h = b$, dann ergiebt sich der Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} \,.\, b + \frac{m(m-1)a^{m-2}}{2!} \cdot b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)a^{m-3}}{3!} \cdot b^3 + \cdots b^m.$$

46. Allgemeine Ableitung der Taylorschen Reihe.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Ausführungen in Abschnitt 44 sich auch auf eine jede nicht rationale

Funktion erweitern lassen, wenn sich diese nur in eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickeln läßt.

In Gleichung 7) erhielten wir den Ausdruck:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!} h^n,$$

der für eine ganze rationale Funktion gültig ist. — Wenn f(x) keine rationale Funktion ist, so wird die obige Reihe (7) nicht dieser Funktion entsprechen können, sondern sich von ihr um eine Größe unterscheiden. Wir wollen diesen Unterschied mit R bezeichnen. Dann ist ganz allgemein:

12) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!} \cdot h^n + R.$$

Die Gleichung 12) bezeichnet man ganz allgemein als die Taylorsche Reihe und den Ausdruck R nennt man den Rest der Taylorschen Reihe.

Wird in Gleichung 12) n sehr groß, dann muß R selbst zur Null werden, wenn die Reihe einen Sinn haben soll. Das besagt, daß die Reihe konvergent sein muß. Der beschränkte Raum unseres Buches macht uns die Besprechung des Restgliedes unmöglich. Unsere weiteren Ausführungen, in denen wir uns zumeist mit den ersten Gliedern begnügen, sowie die unmittelbar vorstehende Bemerkung lassen diese Einschränkung zu.

47. Die Reihe von Mac-Laurin oder die Stirlingsche Reihe.

Die Mac-Laurinsche Reihe ist ein spezieller Fall der Taylorschen Reihe und sie kann unmittelbar aus dieser entwickelt werden. — Setzt man in die Taylorsche Reihe:

12a) $$f(x+h) = f(x) + f'(x) h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} h^3 + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!} h^n + R,$$

x gleich Null und für h den Ausdruck x, dann geht sie über in:

13) $$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R.$$

Der Ausdruck 13) stellt die Mac-Laurinsche Reihe dar. Sie ist sehr brauchbar zur Entwickelung von Funktionen in Reihen. Wir wollen daher einige wichtige Reihen durch sie herleiten.

48. Es soll eine Reihe für sin x entwickelt werden.

Es sei:

14) $$y = f(x) = \sin x.$$

Wir bilden die Differentialquotienten:

15) $$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f''''(x) &= \sin x \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Wie wir schon oben darauf aufmerksam machten, ist sin x eine periodische Funktion, die bei der weiteren Bildung der Differentialquotienten wieder auf die gleichen Ausdrücke führt. — Wir setzen nun $x = 0$. Dann gehen die Ausdrücke in 14) und 15) über in:

16) $$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0^0 &&= 0 \\ f'(0) &= \cos 0^0 &&= 1 \\ f''(0) &= -\sin 0^0 &&= 0 \\ f'''(0) &= -\cos 0^0 &&= -1 \\ f''''(0) &= \sin 0^0 &&= 0. \end{aligned}$$

Man bemerkt leicht, daß in dem Falle, wo n eine ungerade Zahl ist:

$$f^n(x) = \pm \cos x \text{ wird};$$

also:
$$f^n(0) = \pm \cos 0^0 = \pm 1.$$

Führen wir diese Ausdrücke nun in Gleichung 13) ein, dann ist:

$$\sin x = 0 + 1 \, . \, x - 0 - \frac{1 \, . \, x^3}{3!}$$

$$+ 0 + \frac{1 \, . \, x^5}{5!} - + \cdots \pm \frac{1 \, . \, x^n}{n!}.$$

Und somit:

17) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}.$$

Es entspricht also die Funktion sin x einer Reihe, die nach ungeraden Potenzen von x mit abwechselnden Vorzeichen fortschreitet.

49. Es soll die Reihe für cos x entwickelt werden.

Es sei:

18) $$y = f(x) = \cos x.$$

Wir entwickeln die Differentialquotienten:

19) $$f'(x) = -\sin x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \sin x$$
$$f''''(x) = \cos x.$$

Die Differentialquotienten wiederholen sich dann wiederum. Der Ausdruck $f^n(x) = \pm \cos x$, wenn n eine gerade Zahl ist. — Wie in 48 setzen wir x gleich Null. Dann ergiebt sich:

20) $$f(0) = \cos^0 = 1$$
$$f'(0) = -\sin 0^0 = 0$$
$$f''(0) = -\cos 0^0 = -1$$

$$f'''(0) = \sin 0^0 = 0$$
$$f''''(0) = \cos 0^0 = 1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f^n(0) = \pm \cos 0^0 = \pm 1 \quad \text{wenn n eine gerade Zahl ist.}$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung 13) ein und ziehen zusammen, dann ist:

21) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}.$$

Die Funktion cos x entspricht einer Reihe, die nach geraden Potenzen von x mit abwechselnden Vorzeichen fortschreitet.

50. Es soll die Reihe für die Exponentialfunktion e^x entwickelt werden.

(Siehe Abschnitt 8, Gleichung 23.)

Es sei:

22) $$y = f(x) = e^x.$$

Wir bilden die Differentialquotienten:

23) $$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
u. s. w.
$$f^n(x) = e^x.$$

Setzen wir hier auch x = Null, dann folgt für alle Differentialquotienten:

24) $$f^n(0) = e^0 = 1.$$

Setzen wir die Werte in Gleichung 13) ein, so folgt:

25) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Wird in 25) $x = 1$, so erhält man den uns bekannten Ausdruck:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2\dots n}$$

$$= 2.71828\dots$$

51. Es soll die Reihe für die Exponentialfunktion a^x entwickelt werden.

(Siehe Abschnitt 9, Gleichung 26.)

Es sei:

26) $$y = f(x) = a^x.$$

Die Differentialquotienten:

27) $$f'(x) = a^x . l a$$

$$f''(x) = a^x (l a)^2$$

$$f'''(x) = a^x (l a)^3$$

u. s. w.

$$f^n(x) = a^x (l a)^n.$$

Auch hier setzen wir für x Null, dann ergiebt sich:

28) $$f(0) = 1$$

$$f'(0) = l a$$

$$f''(0) = (l a)^2$$

$$f'''(0) = (l a)^3$$

u. s. w.

$$f^n(0) = (l a)^n.$$

Setzen wir in Gleichung 13) ein, dann ist:

29) $$a^x = 1 + x . la$$

$$+ \frac{x^2 (la)^2}{2!} + \frac{x^3 (la)^3}{3!} + \dots + \frac{x^n (la)^n}{n!}.$$

52. Für die Funktion $l(1+x)$ soll eine Reihe entwickelt werden.

(Siehe Abschnitt 23.)

Es sei:

30) $$y = f(x) = l(1+x).$$

Die Differentialquotienten:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = 1.2\,(1+x)^{-3}$$

$$f''''(x) = -1.2.3\,(1+x)^{-4}$$

u. s. w.

$$f^n(x) = -1.(n-1)!\,(1+x)^{-n}.$$

Setzen wir für x, wie in den vorigen Fällen, Null. Dann wird:

31) $$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 1.2$$

$$f''''(0) = -1.2.3$$

u. s. w.

$$f^n(0) = (-1).(n-1)!$$

Somit in Gleichung 13) eingefügt ergiebt die Gleichung:

32) $$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n}.$$

Wird z. B. $x = 1$, dann geht die Reihe in den Ausdruck über:

33) $$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots \pm \frac{1}{n}.$$

Vergleiche hierzu Abschnitt 9.

Nicht immer sind die Reihenentwickelungen mit Hilfe der Mac-Laurinschen Reihe zweckmäßig, weil die Bildung der höheren Differentialquotienten oft sehr umständlich wird. Man bedient sich dann anderer Methoden. Der folgende Abschnitt giebt hierfür ein Beispiel.

53. Die Funktion: arc sin x soll in eine Reihe entwickelt werden.

Daß die Ausführung mit der Mac-Laurinschen Reihe sehr umständlich werden müßte, ersieht man leicht, denn schon der erste Differentialquotient unserer Funktion ergiebt: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Entwickelung erfolgt daher besser in folgender Weise. Es sei:

34) $$y = \text{arc}\sin x$$

Man deutet wie in Abschnitt 6 und 44 die Entwickelung zunächst an:

35) $$\text{arc}\sin x.$$
$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + \cdots$$

Nehmen wir nun rechts und links den Differentialquotienten von 35):

36) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$
$$= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + 7Hx^6 + \cdots$$

Entwickelt man die linke Seite von 36) nach dem Binomischen Lehrsatze, dann ergiebt sich die Form:

37) $$(1-x^2)^{-1/2}$$
$$= 1 + 1/_2 x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

Aus den Gleichungen 36) und 37) folgt nun wiederum:

38) $$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + 7Hx^6 + \cdots$$
$$= 1 + 1/_2 x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

Und hieraus, da die Koeffizienten gleicher Potenzen von x übereinstimmen:

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = \frac{1}{2\,.\,3} \\ E = 0 \\ F = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5} \\ G = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}$$

Diese Werte eingesetzt in die Gleichung 35):

$$39)\qquad \text{arc}\sin x = x + \frac{1\,.\,x^3}{2\,.\,3} + \frac{1\,.\,3x^5}{2\,.\,4\,.\,5} + \cdots$$

54. Die Reihe für arc tang x.

In derselben Weise wie in Abschnitt 53 kann diese Reihe erhalten werden. Der Leser möge seine Kräfte an dieser Aufgabe prüfen. Die Lösung führt dann zu dem Ausdruck:

$$40)\qquad \text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

Diese Gleichung kann verwendet werden, um den Wert von π zu ermitteln. Man bedenke, daß $\text{tang}\,\frac{\pi}{4} = \text{tang}\,45^\circ = 1$ ist. Setzt man nun $x = 1$, dann ergiebt sich: $\text{arc tang}\,1 = \frac{\pi}{4}$. Dann erhält man den Ausdruck:

$$41)\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

Diese Reihe nennt man die Leibnizsche Reihe; man kann mit ihrer Hilfe den Wert von π ermitteln.

Uns genügt es gezeigt zu haben, wie Reihenentwickelungen mittels der Differentialrechnung auszuführen sind. Es ergiebt sich, wie sehr viel einfacher diese neuen Methoden sind, als diejenigen, die wir im 2. Kapitel vorführten. Wir wollen nun in einer Tabelle die wichtigsten Reihen zusammenstellen.

Tafel der wichtigsten Reihen.

1) $f(x+h)=f(x)+f'(x).h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^n(x)}{n!}h^n+R$: Taylorsche Reihe.

2) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+R$: Mac-Laurinsche Reihe.

3) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-+\cdots-+\frac{x^n}{n!}$: n eine ungerade Zahl.

4) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-+\cdots\pm\frac{x^n}{n!}$: n eine gerade Zahl.

5) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x}{n!}$.

6) $a^x=1+x\,la+\frac{x^2(la)^2}{2!}+\frac{x^3(la)^3}{3!}+\frac{x^4(la)^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n(la)^n}{n!}$.

7) $l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots+-\frac{x^n}{n}$.

8) $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\cdots$

9) $\arcsin x=x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}x^5+\cdots$

10) $\operatorname{arc\,tang} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$

Achtes Kapitel.

Die Bestimmung unbestimmter Formen.

55. Erklärung.

Es kommt häufig vor, daß eine Funktion für einen bestimmten Wert der Veränderlichen zu einem unbestimmten Ausdruck führt. Der Grund hierfür liegt, wie leicht einzusehen ist, nur in der Form des betreffenden Ausdruckes. Formen solcher Art sind:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 0^{\infty}; \quad 0^{0} \text{ etc.}$$

Wir wollen das zunächst an einem Beispiel auseinandersetzen. Gegeben sei die Funktion:

1) $$y = \frac{x^2 - 4}{4(x-2)}.$$

Setzen wir in diesen Ausdruck $x = 2$, dann wird er:

$$y = \frac{4-4}{4(2-2)} = \frac{0}{0}.$$

Daß die Funktion 1) thatsächlich auch für $x = 2$ einen bestimmten Wert hat, kann man sehr leicht zeigen, indem man sie durch Division umformt, wodurch ihr Wert, wie in den Elementen schon gelehrt, nicht verändert wird. — Es ist nämlich:

2) $$y = \frac{x^2 - 4}{4(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{4(x-2)} = \frac{x+2}{4}.$$

Setzt man nun $x = 2$, so ist:

3) $$y = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Durch die Differentialrechnung kann man in solchen Fällen leichter zum Ziel gelangen.

56. Bestimmung des unbestimmten Wertes $\frac{0}{0}$.

Die gebrochene Funktion $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ergebe für $x = x_0$ den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Um den wahren Wert durch die Differentialrechnung zu ermitteln, setze man in Zähler und Nenner des Bruches für x den Ausdruck: $x_0 + h$ und entwickle Zähler und Nenner je für sich nach dem Taylorschen Satze. Also:

$$4)\qquad \frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \cdots}{\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)h + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)h^2 + \cdots}$$

Das erste Glied der rechten Seite: $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$ ist der Null gleich, kann also fortgelassen werden. Es geht dann 4) über in:

$$5)\qquad \frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \cdots}{\varphi'(x_0)h + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)h^2 + \cdots}$$

Dividieren wir Zähler und Nenner durch h, so ist:

$$5a)\qquad \frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)h + \cdots}{\varphi'(x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)h + \cdots}$$

Nähert sich jetzt h der Grenze Null, wird also $h = 0$, so erhalten wir den Ausdruck:

$$6)\qquad \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Der Funktionsbruch ist also dem Bruch der Differentialquotienten gleich. — Das ergiebt die Regel:

Wenn eine gebrochene Funktion für einen bestimmten Wert von x auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ führt, so differentiiert man je für sich den Zähler und den Nenner.

Wenden wir die Regel auf unser erstes Beispiel an:

Es war: $y = \frac{x^2 - 4}{4(x-2)}$.

Es ist dann: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4}$.

Also für $x = 2$: $\frac{dy}{dx} = 1$.

Beispiel 2. Gegeben sei der Ausdruck:

$$y = \frac{\sin x}{4x}.$$

Dieser wird für $x = 0$:

$$y = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Differentiieren wir Zähler und Nenner je für sich:

$$\frac{d.(\sin x)}{d.(4x)} = \frac{\cos x}{4}.$$

Dann erhalten wir:

$$\frac{\cos 0}{4} = \frac{1}{4}.$$

57. Bestimmung des unbestimmten Wertes $\frac{\infty}{\infty}$.

Es ist leicht, den Ausdruck auf die Form $\frac{0}{0}$ zurückzuführen. Wird $f(x_1) = \infty$ und $\varphi(x_1) = \infty$, dann ist nach den Gesetzen der Algebra auch:

$$\frac{1}{f(x_1)} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varphi(x_1)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Der Ausdruck: $\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} = \frac{\infty}{\infty}$

geht dann über in:

$$\frac{\frac{1}{f(x_1)}}{\frac{1}{\varphi(x_1)}} = \frac{\{f(x_1)\}^{-1}}{\{\varphi(x_1)\}^{-1}} = \frac{0}{0}.$$

Der Ausdruck kann also wie in 56 behandelt werden.

Nehmen wir hierfür ein Beispiel. Der Ausdruck:

$$y = \frac{\tan 3x}{\tan x}$$

wird für $x = 90°$:

$$y = \frac{\tan . 3(90°)}{\tan 90°} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Differentiieren wir Zähler und Nenner, dann ergiebt sich:

$$\frac{d\,(\text{tang}\,3\,x)}{d\,(\text{tang}\,x)} = \frac{\frac{3}{\cos^2 3\,x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3\,x}.$$

Setzen wir auch hier $x = 90^\circ$, dann wird:

$$\frac{3\cos^2 . 90^\circ}{\cos^2 3 . 90^\circ} = \frac{0}{0}.$$

Wir erhalten von neuem eine unbestimmte Form. Wir werden daher noch einmal den Ausdruck differentiieren:

$$\frac{d\,(3\cos^2 x)}{d\,(\cos^2 . 3\,x)} = \frac{-6 . \cos x . \sin x}{-6 . \cos 3\,x . \sin 3\,x}$$

$$= \frac{\sin 2\,x}{\sin 6\,x}.$$

Auch hier $x = 90^\circ$ gesetzt:

$$\frac{\sin 2 . 90^\circ}{\sin 6 . 90^\circ} = \frac{\sin 180^\circ}{\sin 540^\circ} = \frac{0}{0}$$

ergiebt den unbestimmten Wert. Endlich durch erneutes Differentiieren:

$$\frac{d . (\sin 2\,x)}{d . (\sin 6\,x)} = \frac{2 . \cos 2\,x}{6 . \cos 6\,x}$$

giebt für $x = 90^\circ$:

$$\frac{-2 . 1}{-6 . 1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Das Beispiel lehrt also zugleich, daß man in einem solchen Falle, wo das Differentiieren wiederum auf den unbestimmten Wert führt, man mit der Differentiierung fortfahren muß.

58. Die anderen unbestimmten Ausdrücke lassen sich auf die behandelten stets zurückführen.

Es sei z. B.: $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x}$.

Dieser Ausdruck wird für $x = 0$ zum Ausdruck:

$$y = \frac{1}{0} - \frac{1}{\sin 0} = \infty - \infty.$$

Die Umformung auf eine bekannte Form gelingt, indem man die rechte Seite auf einen Nenner bringt. Also:

$$y = \frac{\sin x - x^3}{x^3 . \sin x}.$$

Setzen wir nun $x = 0$, so ergiebt sich:

$$y = \frac{\sin 0 - 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Den wirklichen Wert mag der Leser nach der ersten Methode ermitteln.

59. Beispiele.

1) Für $x = 0$ wird:

$$y = \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{0}{0}.$$

Wie heißt der wahre Wert? Er ist $= 2$.

2) Für $x = 0$ wird:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0}.$$

Wie heißt der wirkliche Wert? Er ist $= 2$.

3) Für $x = 1$ wird:

$$y = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx} = \infty - \infty.$$

Wie heißt der wirkliche Wert? Er ist $= {}^1/_2$.

4) Für $x = \infty$ wird:

$$y = x^{\frac{1}{x}} = \infty^0.$$

Wie heißt der wirkliche Wert? Man nimmt hier den Logarithmus und schreibt: $\frac{1}{x} \cdot lx = ly$.

Er ist: $$ly = \frac{lx}{x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Diesen Ausdruck differentiiert man:

$$\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} = 0.$$

Man erhält endlich den Wert $= 1$.

Neuntes Kapitel.

Vom Maximum und Minimum der Funktionen.

60. Erläuterungen.

Im Abschnitt 16 haben wir bereits auseinandergesetzt, daß man aus dem ersten Differentialquotienten einer Funktion erkennen kann, ob ihr Bild, also z. B. die Kurve, die sie darstellt, steigt oder fällt gegen die Abscissenachse. Wir erkannten, daß die Kurve wächst, wenn der erste Differentialquotient positiv ist, daß sie fällt, wenn der erste Differentialquotient negativ ist. Wir wollen hieran weitere geometrische Untersuchungen über die Funktionen und ihre Bilder anknüpfen.

61. Kennzeichen für das Maximum und Minimum einer Kurve.

Es sei eine Funktion:

1) $$y = f(x)$$

gegeben und wir denken sie uns gezeichnet in Fig. 5 (S. 88).

Es hat hier das Bild der Funktion, die Linie MN, in A ihren höchsten Punkt, also ihr Maximum, und in B ihren niedrigsten Punkt oder ihr Minimum. Eine andere Art des Maximums zeigt außerdem der Punkt E. — Der Punkt A der Kurve ist dadurch ausgezeichnet, weil alle unmittelbar vorhergehenden und alle unmittelbar folgenden Ordinaten (y) der Kurve kleiner sind als die Ordinate AC des Punktes A. Die Ordinaten wachsen also bis zu A und fallen dann. Im Gegensatz hierzu sind alle vorhergehenden und alle folgenden Ordinaten der Kurve größer

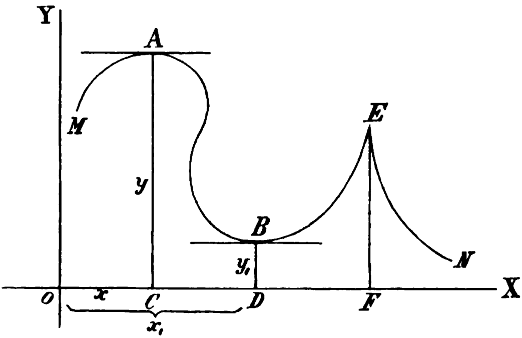


Fig. 5.

als die Ordinate des Punktes B, die in der Figur mit BD (y,) bezeichnet ist. Die Kurve wird also bei B zuerst fallen und dann wachsen. — Für einen Punkt, in dem ein Maximum oder Minimum eintritt, spielen nun die ersten Differentialquotienten der Funktion eine bedeutungsvolle Rolle. Ist er positiv, dann steigt das Bild der Funktion, ist er negativ, dann fällt es. Da nun beim Maximum erst ein Steigen, dann ein Fallen, beim Minimum erst ein Fallen und dann ein Steigen der Kurve eintritt, so muß in den betreffenden Punkten ein Übergang vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt,

kurz ein Zeichenwechsel eintreten. — Das Positive und das Negative sind durch die Null oder durch das Unendliche von einander geschieden. Findet daher in einer Funktion oder in ihrem Bilde an einer Stelle ein Maximum oder Minimum statt, so muß der erste Differentialquotient der Funktion an dieser Stelle Null oder Unendlich werden.

Für diese Auseinandersetzungen giebt uns die Figur 5 eine gute Anschauung. Es ist, wie wir zeigten, der erste Differentialquotient gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die Tangente in dem bestimmten Punkte mit der Abscissenachse macht. — In unserer Figur läuft die Tangente in A und B mit der Abscissenachse parallel, der Winkel ist also gleich Null und die trigonometrische Tangente daher auch gleich Null. In E steht die Tangente senkrecht auf der Abscisse, der Winkel ist gleich 90° und die trigonometrische Tangente somit gleich unendlich.

Um nun festzustellen, ob in einem Punkte einer Kurve (Funktion), für den der erste Differentialquotient Null ist (wir wollen uns zuerst mit diesem Fall beschäftigen), ein Maximum oder ein Minimum eintritt, muß untersucht werden, ob die Kurve im weiteren Fortschreiten fällt oder steigt. Bei einem Maximum muß die Funktion in der Folge fallen, für ein Minimum wachsen. Daher werden die zweiten Differentialquotienten hier entscheiden! Ist er negativ, dann hat die Kurve in dem betreffenden Punkte ein Maximum, ist er positiv ein Minimum.

62. Schema für die Untersuchung einer Funktion nach dem Maximum oder Minimum.

Es sei eine Funktion $f(x)$ gegeben. Für den Wert $x = a$ wird der erste Differentialquotient: $f'(a) = 0$.

Ist dann:

$f''(a)$ negativ, dann ist an dieser Stelle ein Maximum,
$f''(a)$ positiv, dann ist an dieser Stelle ein Minimum.

Um ein Maximum oder Minimum von einer Funktion wirklich zu bestimmen, setzt man daher den ersten Differentialquotienten gleich Null und bestimmt den Wert von x. Diesen Wert setzt man in den zweiten Differentialquotienten; wird das Resultat negativ, dann hat die Funktion für diesen Wert ein Maximum, wird das Resultat positiv, ein Minimum.

Das soll zunächst an einem Beispiel ausführlich illustriert werden. Es sei eine Funktion:

$$y = x^3 + 6x^2 - 15x$$

gegeben.

Wir wollen untersuchen, ob sie ein Maximum oder Minimum besitzt, und ermitteln, wo es sich befindet. — Nehmen wir den ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x - 15.$$

Wir setzen ihn der Null gleich und bestimmen aus der quadratischen Gleichung die Werte von x. Also:

$$3x^2 + 12x - 15 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm \sqrt{9}$$

$$x = -2 \pm 3 = \begin{cases} +1 \\ -5 \end{cases}.$$

Bilden wir den zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 12.$$

Setzen wir nach einander die beiden Wurzelwerte ein:

$$6 . 1 + 12 = +18$$

$$6 . -5 + 12 = -18.$$

Für $x = 18$ erhält man also das Minimum und für $x = -18$ das Maximum der Funktion resp. des Bildes, das sie darstellt.

Zunächst wollen wir nun an einer größeren Anzahl von Beispielen dem Leser Gelegenheit geben, diese Methode einzuüben.

63. Aufgaben.

1) Von einem Dreieck seien zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben. Wie groß muß der Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird? Siehe Figur 6.

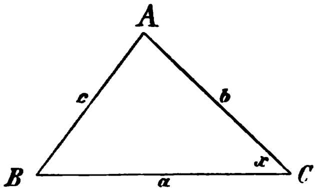


Fig. 6.

Lösung. In der Trigonometrie wird gezeigt, daß man den Inhalt eines Dreiecks durch die Formel:

$$F = {}^1/_2\, ab \, . \sin x$$

ausdrücken kann.

Schreiben wir der Bequemlichkeit halber:

$$y = 2F = ab \, . \sin x.$$

Es ist nun: $\frac{dy}{dx} = ab \, . \cos x.$

Also wird:

$$ab \cos x = 0; \quad \cos x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Der zweite Differentialquotient ergiebt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ab \, . \sin x.$$

Da $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ist, wird:

$$-ab \, . \sin x = -ab.$$

Das Dreieck wird also ein solches mit maximalem Inhalt, wenn der eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

2) Von einem Rechteck mit dem bestimmten Inhalt I soll die Grundlinie und die Höhe ermittelt werden, die veranlassen, daß der Umfang U ein Minimum werde.

Lösung. Bezeichnen wir die Grundlinie mit x, dann muß die Höhe durch $\frac{I}{x}$ ausgedrückt werden, denn es ist:

$$I = x \cdot \frac{I}{x},$$

der Inhalt des Rechtecks.

Wir erhalten nun die Formel für den Umfang durch die Formel:

$$U = 2x + 2 \cdot \frac{I}{x} = 2\left(x + \frac{I}{x}\right).$$

Es wird dann:

$$\frac{dU}{dx} = 2 - \frac{2I}{x^2} = 2\left(1 - \frac{I}{x^2}\right) = 0.$$

Aus: $1 - \frac{I}{x^2} = 0$ ergiebt sich:

$$x^2 = I \quad \text{und} \quad x = \sqrt{I}.$$

Es folgt hieraus, daß von allen Rechtecken von demselben Inhalte das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

3) Wie heißt das Maximum oder Minimum der Funktion:

$$y = x^2 + ax + b.$$

Lösung. Wir nehmen den ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + a.$$

Also: $2x + a = 0; \quad x = -\frac{a}{2}.$

Der zweite Differentialquotient ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +2.$$

Die Funktion hat also ein Minimum.

4) In ein Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h soll so ein Rechteck gezeichnet werden, das auf der Grund-

linie a ruht, daß sein Flächeninhalt ein Maximum werde. (Siehe Figur 7.)

Lösung. Die Höhe des fraglichen Rechtecks sei gleich x. Dann kann man die Höhe des kleinen Dreiecks ADE mit

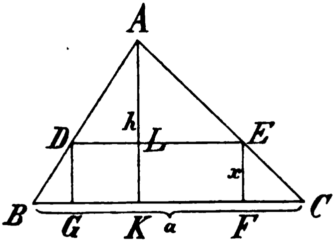


Fig. 7.

h—x bezeichnen. Mit Hilfe eines bekannten Satzes aus der Proportionslehre ergiebt sich dann:

$$h:(h-x)=a:DE;$$

also:

$$DE=\frac{a(h-x)}{h}.$$

Der Inhalt des Rechtecks kann also bezeichnet werden durch:

$$I=\frac{a}{h}x(h-x)=\frac{a}{h}(hx-x^2).$$

Daher:

$$\frac{dI}{dx}=h-2x,$$

und:

$$h-2x=0; \quad x=\frac{h}{2}.$$

Bilden wir den zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2I}{dx^2}=-2.$$

Es giebt also ein solches Maximum, wie der zweite Differentialquotient erweist.

5) In eine Kugel soll ein solcher Kegel eingeschrieben werden, daß sein Mantelinhalt ein Maximum werde.

Lösung. Nennen wir (siehe Fig. 8) den Kegelradius r, den Radius an der Basis des Kegels y, die Höhe des

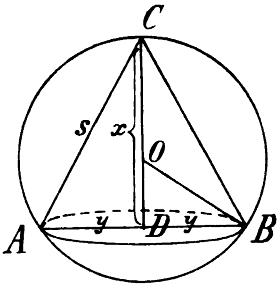


Fig. 8.

Kegels x und seine Seitenlinie s, dann wird die Mantelfläche des Kegels:

$$M = y \cdot s \cdot \pi.$$

Aus der Stereometrie erhalten wir dann die Bedingungen:

$$y^2 = x(2r - x)$$

und:

$$s^2 = 2rx.$$

Es wird daher:

$$M^2 = 2rx^2(2r - x)\pi^2.$$

Der Einfachheit wegen können wir schreiben:

$$Y = x^2(2r - x) = 2rx^2 - x^3$$

und es wird:

$$\frac{dY}{dx} = 4rx - 3x^2,$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = 4r - 6x.$$

Es ist weiter:

$$4rx - 3x^2 = 0$$

oder:
$$3x^2 - 4rx = 0$$
$$x^2 - \frac{4}{3}rx = 0$$
$$x = \frac{2}{3}r \pm \sqrt{\frac{4}{0}r^2}$$
$$= \frac{2}{3}r \pm \frac{2}{3}$$
$$x = \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{3}r \end{cases}.$$

Setzen wir diese Werte in den zweiten Differentialquotienten ein, dann erhalten wir für $x = \frac{4}{3}r$ ein Maximum.

6) Es sei ein rechter Winkel gegeben. Zwischen seinen Schenkeln soll durch einen Punkt A die kürzeste Linie gezogen werden. (Siehe Figur 9.)

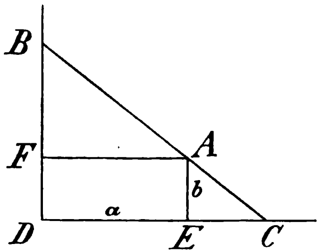


Fig. 9.

Lösung. Bezeichnen wir sie mit BC. — Die Koordinaten des fraglichen Punktes seien: $DE = a$ und $AE = b$. Setzen wir außerdem $DC = x$ und $BD = y$. Wir erhalten nunmehr die Proportion:
$$y : x = b . (x - a)$$
und hieraus ergiebt sich: $y = \frac{bx}{x - a}$.

Dann ist aber: $\overline{BC}^2 = x^2 + \frac{b^2x^2}{(x-a)^2}$.

Nehmen wir den ersten Differentialquotienten:
$$\frac{d\,(BC^2)}{dx} = 2x + \frac{(x-a)^2 . 2b^2x - b^2x^2 . 2\,(x-a)}{(x-a)^4}.$$

Setzt man:

$$2x + \frac{(x-a)^2 \cdot 2b^2x - b^2x^2 \cdot 2(x-a)}{(x-a)^4} = 0,$$

dann ergiebt sich:

$$x = a + \sqrt[3]{ab^2} = DC.$$

Damit ist die Lage der Linie BC bestimmt.

64. Die Untersuchung des Maximums und Minimums von Brüchen.

Die Maximum- und Minimumuntersuchungen lassen sich zuweilen wesentlich vereinfachen. Unbequem wird zum Beispiel die Rechnung, wenn der erste Differentialquotient ein Bruch ist. Es sei also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}; \quad \text{dann wird:} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Wie wir uns erinnern, muß der erste Differentialquotient gleich Null sein. Der Bruch $\frac{u}{v}$ ist aber Null, wenn u der Null gleich wird. Daher muß auch in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

der zweite Teil des Zählers Null sein, also $udv = 0$ und es wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{vdu}{v^2} = \frac{du}{v}.$$

Nehmen wir hierzu ein Beispiel. Es sei:

$$y = \frac{x}{x^2+1};$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \text{und } x = \pm 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{v} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Endlich: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$: Maximum.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{4} = +\frac{1}{2}$: Minimum.

65. Das Maximum und Minimum solcher Funktionen, für die $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird.

Wir haben bisher diejenigen Fälle betrachtet, in denen der erste Differentialquotient Null wurde, und bei denen in dem betreffenden Punkte die Tangente der Abscissenachse parallel lief. Seltener kommt es vor, daß der erste Differentialquotient unendlich wird. Wie in Abschnitt 61 auseinandergesetzt wurde, steht in dem Falle die Tangente senkrecht auf der Abscissenachse. Diese Untersuchungen sind viel weitläufiger. Die allgemeine Regel, die dann eingeschlagen werden muß und die für jeden Fall gilt, ist die nachfolgende.

Die Funktion wird differentiiert und der Wert ermittelt, für den $f'(x) = 0$ oder $f'(x) = \infty$ wird. Er sei gleich a. Nehme man nun den nächst vorhergehenden und den nächst folgenden Wert dieser Differentialquotienten, also $f'(a - h)$ und $f'(a + h)$. Diese Ausdrücke müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben, daß ein Maximum oder Minimum eintreten kann. Ist nun:

1) $f'(a - h)$ positiv und $f'(a + h)$ negativ, } dann findet ein **Maximum** statt.

Ist aber:

2) $f'(a - h)$ negativ und $f'(a + h)$ positiv, } dann findet ein **Minimum** statt.

Zehntes Kapitel.

Von den Tangenten, Normalen, Subtangenten und Subnormalen der Kurven.

66. Erklärungen.

Es sei eine Kurve gegeben (Fig. 10), die der Gleichung:

1) $$y = f(x)$$

entspricht.

Auf der Kurve nehmen wir einen Punkt P an, der die Koordinaten x und y hat. In P ziehe man die Tangente, welche die Abscissenachse in R schneidet und mit ihr den Winkel α bildet. Wir bezeichnen nun die **Strecke PR** als

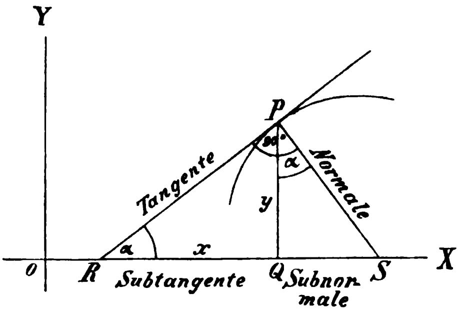


Fig. 10.

die **Tangente** = **T**; die im Punkte P auf der Tangente senkrechte Linie PS als die **Normale** = **N** der Kurve. Sodann nennt man die Projektion der Tangente auf die x-Achse, also die Strecke RQ, die **Subtangente** = St und die Projektion der Normale auf die x-Achse, also die Strecke QS, die **Subnormale** = Sn der Kurve.

67. Formeln für die Tangente zc.

Es sollen nunmehr die entsprechenden Differentialausdrücke für T, N, St und Sn gefunden werden. Unmittelbar aus der Figur (siehe Fig. 10) ersieht man, daß $\frac{PQ}{RQ} = \tang \alpha$ ist. Da nun der erste Differentialquotient einer Funktion der trigonometrischen Tangente entspricht, so kann man auch schreiben:

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{PQ}{RQ} = \tang \alpha.$$

Aus der Figur ergiebt sich außerdem:

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{QS}{PQ} = \tang \alpha.$$

Wir erhalten aus 3):

4) $$QS = PQ \tang \alpha$$

und, da $PQ = y$ ist:

5) $$QS = \text{Subnormale} = y \cdot \frac{dy}{dx} = Sn.$$

In ähnlicher Weise aus Gleichung 2):

6) $$RQ = \frac{PQ}{\tang \alpha} = \frac{PQ}{\frac{dy}{dx}} = \text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy} = St.$$

Mit Leichtigkeit sind aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken PQR und PQS auch die Formeln für die Tangente und die Normale zu ermitteln. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist:

$$\overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2.$$

Fügen wir nun die ermittelten Werte in die rechte Seite ein, dann wird:

$$\overline{PR}^2 = y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$$
$$= y^2\left(1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2\right).$$ Hieraus:

7) $$PR = \text{Tangente} = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = T.$$

In der gleichen Weise erhält man:

$$\overline{PS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QS}^2$$

oder: $$= y^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2\left(1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right).$$ Also:

8) $$PS = \text{Normale} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = N.$$

68. Umformung dieser Formeln.

Die Differentialausdrücke für die Tangente und die Normale können noch in anderer Form geschrieben werden, in der sie zuweilen bequemer sind. Es sei wiederum eine Kurve gezeichnet, die der Funktion:

1) $$y = f(x) \quad \text{entspricht.}$$

Wir denken uns auf der Kurve (siehe Fig. 3 Seite 30) zwei sehr nahe Punkte gezeichnet, die wir mit P und P_1 bezeichnen wollen. — P habe die Koordinaten x und y und P_1 die Koordinaten $(x + \triangle x)$ und $(y + \triangle y)$. Bezeichnen wir die Sehne PP_1 mit $\triangle s$. Dann ist nach dem Pythagoras:

9) $$\triangle s^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2.$$

Kommt der Punkt P_1 dem Punkt P unendlich nahe, dann geht die Sehne $\triangle s$ in ds über und fällt mit dem Kurvenstück PP_1 zusammen und $\triangle x$ und $\triangle y$ werden zu dx und dy. Daher:

10) $$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Wenn wir den Ausdruck 10) durch dx^2 und sodann durch dy^2 dividieren, dann erhalten wir zwei neue Beziehungen, die für die Neuableitung bedeutungsvoll sind. Also:

11) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

12) $$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$

Setzen wir diese Bezeichnungen in die Gleichungen 7) und 8) ein, dann erhalten wir die neuen Tangenten- und Normalenformeln:

13) $$T = \textbf{Tangente} = y\frac{ds}{dy} \quad \text{und}$$

14) $$N = \textbf{Normale} = y\frac{ds}{dx}.$$

69. Die T, N, Sn und St an der Parabel.

Zur Erläuterung des vorhergehenden Abschnittes wollen wir zunächst die Größen T, N, Sn, St für die Parabel ableiten. In der analytischen Geometrie wird gezeigt, daß die Gleichung der Parabel die Form hat:

15) $$y^2 = 2px.$$

Differentiieren wir:

$$2y\,dy = 2p\,dx$$

und bilden Differentialquotienten:

16) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y} = \frac{p}{y}.$$

Diesen Wert setzen wir in Formel 11) und 12) ein. Also:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p}{y}\right)^2$$

$$= \frac{y^2+p^2}{y^2}. \quad \text{Daher:}$$

17) $$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{y^2+p^2}.$$

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2$$

$$= \frac{p^2 + y^2}{p^2}.\quad \text{Daher:}$$

18) $$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Werden die Ausdrücke 17) und 18) endlich in die Formeln für T, N, Sn und St eingefügt, dann ergeben sich die gewünschten Formeln für die Parabel:

19) $$T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{p}\cdot\sqrt{p^2 + y^2}.$$

20) $$N = y\frac{ds}{dx} = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

21) $$St = y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x.$$

22) $$Sn = y\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot p}{y} = p.$$

Es ergeben sich aus 21) und 22) die interessanten geometrischen Sätze:

1) Die Subnormale einer Parabel ist immer konstant und zwar gleich dem Parameter.

2) Die Subtangente einer Parabel ist gleich dem doppelten Abscissenstücke.

70. Die analytischen Ausdrücke für Tangente und Normale.

Wir wollen nunmehr noch die analytischen Ausdrücke mittels der Methode der analytischen Geometrie herleiten. Betrachten wir zu dem Zwecke die Figur 10 (Seite 98). Die allgemeine Gleichung einer Tangente ist:

23) $$y_{,} = ax_{,} + m,$$

wenn $y_{,}$ und $x_{,}$ die laufenden Koordinaten sind. Für die Tangente im Berührungspunkte P sind die Koordinaten x und y. Also wird hier:

24) $$y = ax + m.$$

Differentiieren wir den Ausdruck 24).

25) $$dy = a \, . \, dx; \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = a.$$

Wir erkennen aus 25), daß der Koeffizient a von x, die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Tangente mit der Abscisse macht.

Subtrahieren wir 24) von 23) und setzen den Wert von a ein, dann erhalten wir die **Gleichung der Tangente:**

26) $$y_{,} - y = \frac{dy}{dx}(x_{,} - x).$$

Die analytische Formel für die Normale erhalten wir leicht aus derselben Gleichung, es ist nur gleichfalls a zu bestimmen. Also wiederum ist:

$$y_{,} - y = a(x_{,} - x).$$

Die Normale bildet mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel $PSx_{,}$, der gleich $90° + \alpha$ ist. Also:

27) $$\operatorname{tang} PSx = \cot \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tang} \alpha} = -\frac{dx}{dy}.$$

Somit ergiebt sich als Formel für die **Normale:**

28) $$y_{,} - y = -\frac{dx}{dy}(x_{,} - x).$$

71. Anwendung auf die Parabel.

Entwickeln wir auch die analytischen Ausdrücke der Tangente und Normale für die Parabel.

Wir erhielten als allgemeine Formel für die Tangente:

$$y_{,} - y = \frac{dy}{dx}(x_{,} - x).$$

Aus Gleichung 16) ergab sich die Beziehung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Somit wird die Gleichung für **die Tangente an der Parabel:**

29) $$y_{,} - y = \frac{p}{y}(x_{,} - x).$$

In der gleichen Weise erhalten wir die Gleichung für die Normale der Parabel. Die allgemeine Gleichung lautet:

$$y_{,} - y = -\frac{dx}{dy}(x_{,} - x).$$

Also wird die **Normalengleichung der Parabel:**

30) $$y_{,} - y = -\frac{y}{p}(x_{,} - x).$$

Zur Uebung möge der Leser die gleichen Aufgaben für die Sinuslinie lösen, deren Gleichung ist:

$$y = \sin x.$$

Durch Anwendung der Formeln 5, 6, 7 und 8 gelangt man zu den Ausdrücken:

$$N = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

$$T = \operatorname{tang} x \,.\, \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

$$Sn = \sin x \cos x.$$

Und $$St = \operatorname{tang} x.$$

72. Die Bezeichnungen für die Tangente und Normale ꝛc. in Polarkoordinaten.

Häufig ist es vorteilhaft, statt des rechtwinkligen Koordinatensystems sich der Polarkoordinaten zu bedienen. Wir wollen hier zunächst die Formeln für die Tangenten und Normalen in Polarkoordinaten herleiten. Betrachten wir die Figur 11. In der analytischen Geometrie bezeichnet man **o** als den **Pol** des Koordinatensystems und **o x** als die **Polarachse.** Ferner nennt man **r** (o P) den **Radius vector** und den Winkel α das **Argument** des Punktes P.

Die Gleichungen, die das rechtwinklige Koordinatensystem mit dem Polarkoordinatensystem verbinden, ergeben sich unmittelbar aus der Figur 11. Es ist:

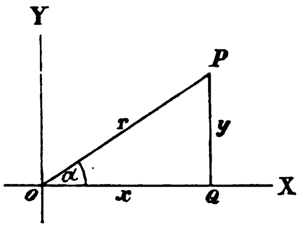


Fig. 11.

31) $x = r \cdot \cos a$

$y = r \cdot \sin a$

Und $r^2 = x^2 + y^2$.

Um nun eine Anschauung von der geometrischen Lage der Tangenten und Subtangenten, der Normalen und Subnormalen im System der Polarkoordinaten zu gewinnen, betrachten wir die Figur 12. — Es ist uns

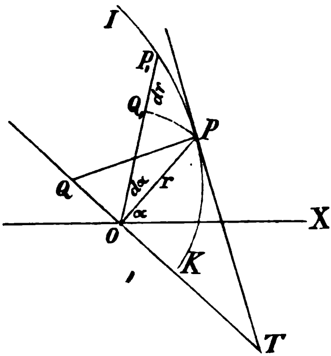


Fig. 12.

hier ein Bogenstück IK einer Kurve gegeben und auf dieser ein Punkt P. Sind r und a die Polarkoordinaten, dann ergiebt sich als Gleichung der Kurve:

32) $$r = \varphi(a).$$

Errichten wir nun auf dem Radius vector r im Punkte O eine Senkrechte und ziehen durch P die Tangente, welche die Senkrechte in T schneidet. Endlich errichten wir in P die Normale PQ.

Wir erhalten nunmehr folgende Stücke und ihre Bezeichnungen.

Man nennt:

PT die **Polar-Tangente** = T.
PQ die **Polar-Normale** = N.
TO die **Polar-Subtangente** = St.
Und: QO die **Polar-Subnormale** = Sn.

Diese Strecken sollen nun formuliert werden.

73. Ableitung der Formeln für T, N, St und Sn in Polarkoordinaten.

Der Punkt P (siehe Fig. 12) verschiebe sich um die kleine Strecke $PP_{,}$. Dann sind die Koordinaten für $P_{,}$: $r + dr$ und $\alpha + d\alpha$. — Man beschreibe nun mit r um o einen Kreisbogen, der die Linie $P_{,}O$ in $Q_{,}$ trifft; es ist dann $P_{,}Q_{,}$ gleich dr. Da wir uns die Strecke $PP_{,}$ unendlich klein vorstellen können, so darf man das Dreieck $PP_{,}Q_{,}$ als ein geradliniges Dreieck betrachten. Es steht dann $PQ_{,}$ senkrecht zu $P_{,}O$ und es ist:

33) $$PQ_{,} = r\,d\alpha.$$

Es ist dann auch:

$$\sphericalangle Q_{,}PP_{,} = \sphericalangle PTO = \sphericalangle OPQ$$

und die entsprechenden Dreiecke sind ähnlich:

$$P_{,}PQ_{,} \sim OPT \sim OPQ.$$

Es läßt sich daher die Proportion bilden:

$$TO : PO = Q_{,}P : Q_{,}P_{,} \quad \text{oder:}$$

34) $$TO : r = r\,d\alpha : dr.$$

Daher:

35) $$TO = \text{Subtangente} = \frac{r^2 d\alpha}{dr} = St.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken läßt sich auch folgende Proportion bilden:

$$OQ : OP = Q_{,}P_{,} : Q_{,}P \quad \text{oder:}$$

36) $$OQ : r = dr : r d\alpha.$$

Und hieraus folgt:

37) $$OQ = \text{Subnormale} = \frac{r \,.\, dr}{r \,.\, d\alpha} = \frac{dr}{d\alpha} = Sn.$$

Wenden wir den Pythagoras an, so folgt:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 \quad \text{oder:}$$

$$(\text{Normale})^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2.$$

Es ergiebt sich somit für die Normale die Formel:

38) $$N = \text{Normale} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}.$$

Verwenden wir wiederum den Pythagoras, so ergiebt sich:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OT}^2 \quad \text{oder:}$$

$$(\text{Tangente})^2 = r^2 + \left(\frac{r^2 d\alpha}{dr}\right)^2.$$

Somit erhalten wir für die Tangente die Formel:

39) $$T = \text{Tangente} = r\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2}.$$

74. Ein Beispiel.

Wir wollen die T, N, St und Sn in Polarkoordinaten an der Archimedischen Spirale ableiten. Eine Archimedische Spirale entsteht, wenn sich eine gerade Linie um einen festen Punkt O dreht,

während ein anderer Punkt P auf der geraden Linie sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegt.

Die Gleichung der Archimedischen Spirale (siehe Fig. 13) lautet:

40)
$$r = a\alpha.$$

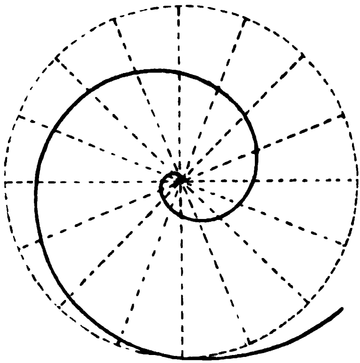


Fig. 13.

Die Formel besagt, daß der Radius vector dem Argument proportional ist.

Differentiieren wir zunächst die Gleichung 40) nach α.

41)
$$\frac{dr}{d\alpha} = a = Sn.$$

Wie wir aus Gleichung 37) wissen, ist das der Ausdruck für die Subnormale. — Die Subnormale ist also für alle Punkte der Archimedischen Spirale konstant. — Wir erhalten sehr leicht die Formel für die Subtangente, wenn wir den Wert von 41) in die Form 35) einfügen. Also:

42)
$$St = r^2 \frac{d\alpha}{dr} = r^2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{r^2}{a}.$$

Mit Verwendung von 40) endlich:

43) $$\text{Subtangente} = \frac{a^2 \cdot \alpha^2}{a} = a\alpha^2.$$

Setzen wir unsere Werte in die Formeln 38) und 39) ein, so ergeben sich die Ausdrücke für:

44) die **Tangente**: $T = r\sqrt{1 + \alpha^2}$ und

45) die **Normale**: $N = a\sqrt{1 + \alpha^2}$.

75. Von der Asymptote.

Eine Asymptote ist eine Tangente, die eine Kurve in einem unendlich fernen Punkte berührt.

In der analytischen Geometrie machen wir die Bekanntschaft der Asymptoten bei den Untersuchungen über die Hyperbel.

Wir wollen nun die Methode ermitteln, um bestimmen zu können, ob eine Kurve eine Asymptote hat. (Siehe Fig. 14.)

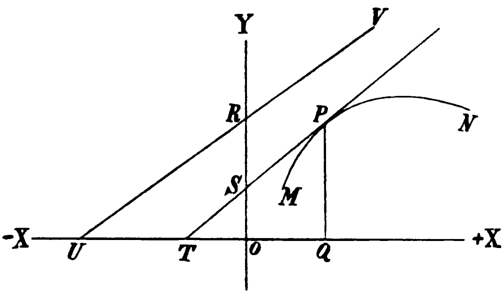


Fig. 14.

In unserer Figur sei MN ein Kurvenstück einer krummen Linie, die durch die Gleichung gegeben ist:

46) $$y = f(x).$$

Ferner sei UV die im Folgenden näher zu bestimmende Asymptote. Sie kann ermittelt werden durch Bestimmung

der Punkte R und U, die sie gemeinschaftlich mit der y= und der x=Achse hat. Nehmen wir nun an, es sei P ein Punkt der Kurve, der durch die Koordinaten x und y bestimmt ist. Ferner sei PT die Tangente im Punkte P. Je mehr P nach N zugleitet und darüber fort geht, um so mehr nähert sich S dem Punkte R. Wird $x = \infty$, dann werden auch die Stücke UT und SR unendlich klein. Um zu einem analytischen Ausdruck zu gelangen, wollen wir To und So durch x ausdrücken. Bleiben To und So für den Wert $x = \infty$ selbst endlich, dann ist eine Asymptote für die gegebene Kurve vorhanden. Bleibt eine der beiden Strecken endlich, während die andere unendlich wird, dann ist die Asymptote einer Koordinatenachse parallel. Werden endlich die genannten Strecken gemeinschaftlich zur Null, dann geht die Asymptote durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems hindurch.

Stellen wir nun folgende Ueberlegungen an: In unserer Figur ist oT negativ und oS positiv.

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Es wird:

$$oT = x - \text{der Subtangente} = x - St$$

und $$oS = -oT \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Fügen wir den Wert der Subtangente ein, dann ist:

47) $$oT = x - y\frac{dx}{dy} \quad \text{und}$$

48) $$oS = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Wird in diesen Ausdrücken $x = \infty$, dann ergeben sich die Grenzwerte von oT und oS.

76. Ein Beispiel zur Erläuterung der Asymptoten.

Die analytische Geometrie entwickelt für die Hyperbel die Formel:

49) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Wir wollen die Asymptote für die Hyperbel bestimmen. Es ist zunächst:

50) $$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Diesen Wert wollen wir in die Ausdrücke 47) und 48) einfügen, dann ergiebt sich:

51) $$oT = x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

$$= x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x} = \frac{a^2}{x} \quad \text{und}$$

52) $$oS = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot x$$

$$= \frac{b(x^2 - a^2) - bx^2}{a\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Setzen wir nun in die Ausdrücke 51) und 52) $x = \infty$, dann werden sie beide der Null gleich. Nach unseren Ausführungen in Abschnitt 75 geht somit die Asymptote an der Hyperbel durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems. Nunmehr muß noch der Berührungswinkel α bestimmt werden. Es ist:

53) $$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}.$$

Setzen wir $x = \infty$, dann ist:

54) $$\operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{b}{a}.$$

Elftes Kapitel.

Von der Konvexität, der Konkavität und von den Wendepunkten einer Kurve.

77. Erklärungen.

Legt man an einen Punkt einer Kurve eine Tangente, dann nennt man die Kurve nach unten **konkav** (also nach der Abscissenachse zu), wenn alle benachbarten Punkte, wie bei $P_{,}$, unterhalb der Tangente liegen (siehe Fig. 15).

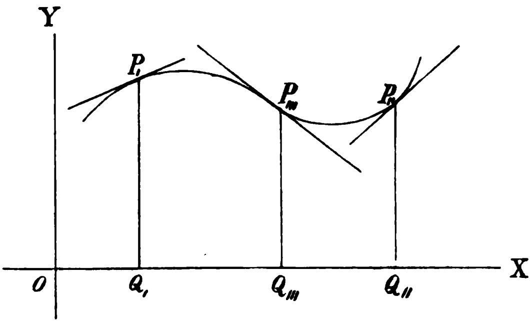


Fig. 15.

Man nennt eine Kurve nach unten **konvex**, wie bei $P_{,,}$, wenn die benachbarten Punkte über der Tangente liegen. Ein Punkt endlich, wie bei $P_{,,,}$, bei dem die Konkavität in die Konvexität oder umgekehrt übergeht, nennt man einen **Wendepunkt**.

78. Ableitung, um die Bedingungen für die Konkavität und Konvexität einer Kurve festzustellen.

Es sei eine Kurve gegeben, deren Gleichung ist:

1) $$y = f(x).$$

Wir wollen die Bedingungen für ihre Konkavität oder Konvexität ermitteln. Betrachten wir hierzu die Fig. 16. —

In dem hier gezeichneten Kurvenstück hat der Punkt P die Koordinaten x, y. Wir denken uns durch P die Tangente gezogen. Dann sieht man, daß die Kurve nach unten konvex ist, weil alle dem Punkte P benachbarten Punkte, wie z. B. $P_{,}$ und $P_{,,}$, über der Tangente liegen.

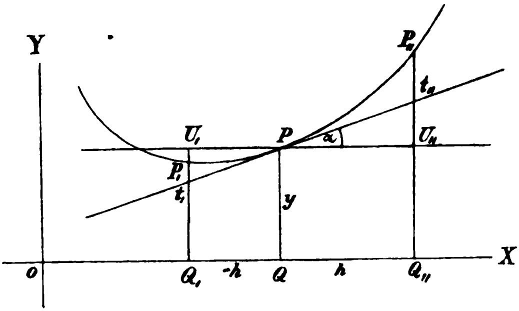


Fig. 16.

Die Ordinaten der Punkte $P_{,}$ bezw. $P_{,,}$ haben mit der Tangente die Durchschnittspunkte $t_{,}$ bezw. $t_{,,}$. Da, wie bekannt, die Ordinaten nach oben hin wachsen, so müssen die Strecken $P_{,}t_{,}$ und $P_{,,}t_{,,}$ positiv also größer als Null sein. Wir schreiben somit:

$$2)\qquad \begin{aligned} P_{,}t_{,} &= P_{,}Q_{,} - Q_{,}t_{,} > 0 \quad \text{und} \\ P_{,,}t_{,,} &= P_{,,}Q_{,,} - Q_{,,}t_{,,} > 0. \end{aligned}$$

Hat, wie wir oben angaben, P die Koordinaten x und y, so hat $P_{,}$ die Abscisse $(x - h)$ und $P_{,,}$ die Abscisse $(x + h)$. — Entwickeln wir nun nach dem Taylorschen Satze:

$$3)\qquad P_{,,}Q_{,,} = f(x+h) = f(x) + f'(x)\,.\,h + \frac{f''(x)\,h^2}{2!} + \frac{f'''(x)\,h^3}{3!} + \cdots$$

Ziehen wir durch P eine parallele Linie zur Abscisse und bezeichnen die Durchschnittspunkte mit den Ordinaten mit $U_{,}$ und $U_{,,}$, dann ergeben sich folgende Beziehungen:

Im rechtwinkeligen Dreiecke $t_{,,} U_{,,} P$ ist:

4) $$t_{,,}U_{,,} = PU_{,,} . \operatorname{tang} \alpha = h . \operatorname{tang} \alpha = h . f'(x).$$

Daraus folgt, daß:

5) $$Q_{,,}t_{,,} = t_{,,}U_{,,} + U_{,,}Q_{,,} = y + t_{,,}U_{,,} = y + h . f''(x)$$

oder:

5a) $$Q_{,,}t_{,,} = f(x) + h f'(x) \text{ ist.}$$

Subtrahieren wir nun 5a) von 3), dann folgt:

6) $$P_{,,}Q_{,,} - Q_{,,}t_{,,} = \frac{f''(x) h^2}{2!} = P_{,,}t_{,,}.$$

In derselben Weise wollen wir den Wert von $P_{,}t_{,}$ ermitteln. Wiederum gilt uns der Taylorsche Satz:

7) $$P_{,}Q_{,} = f(x-h) = f(x) - f'(x).h + \frac{f''(x) h^2}{2!} - + \cdots$$

Es wird:

8) $$t_{,}U_{,} = -h . \operatorname{tang} \alpha = -h f'(x).$$

In gleicher Weise, wie in 5):

9) $$Q_{,}t_{,} = y - t_{,}U_{,} = y - h f'(x)$$
$$= f(x) - h . f'(x).$$

Also endlich:

10) $$P_{,}Q_{,} - t_{,}Q_{,} = \frac{f''(x) h^2}{2!} = P_{,}t_{,}.$$

Man erhält hieraus den Satz: **Ist der zweite Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ positiv, dann ist die Kurve, die ihr entspricht, nach unten konvex.**

78a). Bedingungen für die Konkavität einer Kurve.

(Siehe Fig. 17.)

Durch dieselben Schlüsse wird festgestellt, **daß eine Kurve nach unten konkav ist, wenn der zweite Differentialquotient der Funktion, den sie darstellt, negativ ist.**

79. Der Wendepunkt.

Aus dem Vorstehenden ist leicht einzusehen, daß, wenn der zweite Differentialquotient Null oder unendlich wird, die Kurve für diesen Punkt vom **Konkaven** zum **Konvexen** oder umgekehrt übergehen kann. An dieser Stelle wird sich also in gewissen Fällen ein **Wendepunkt**

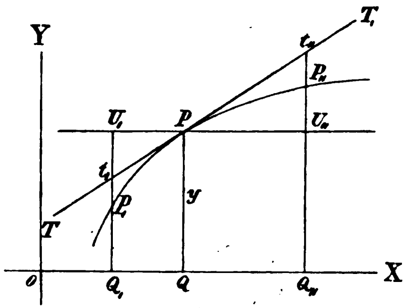


Fig. 17.

befinden. Siehe $P_{,,,}$ in Fig. 15. — Wir wollen die Kennzeichen näher untersuchen. — Hat sich herausgestellt, daß für einen bestimmten Wert von x der zweite Differentialquotient Null oder unendlich geworden ist, so muß man die unmittelbar vorangehenden und folgenden Punkte untersuchen.

Ist $f''(x-h)>o$ und $f''(x+h)<o$, dann geht die Kurve von der Konvexität zur Konkavität über und in P befindet sich ein Wendepunkt.

Ist dagegen:

$$f''(x-h)<o \quad \text{und} \quad f''(x+h)>o,$$

dann geht die Kurve von der Konkavität zur Konvexität über und in P ist gleichfalls ein Wendepunkt.

80. Beispiele.

1) Die Parabel soll auf ihre Konkavität und Konvexität untersucht werden.

Die Gleichung der Parabel lautet:

$$y^2 = 2px.$$

Wir nehmen die Differentialquotienten:

$$2y\,dy = 2p\,dx.$$

Daher:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y} = \frac{p}{y}.$$

Sodann:
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p\,dy}{y^2} = -\frac{p \cdot 2p}{2y \cdot y^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Wie man nun sofort erkennt, wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ für positive Werte von y negativ. Die obere Hälfte der Parabel ist also nach unten konkav. Setzt man für y negative Werte, dann ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv und wir sehen, daß der untere Teil der Parabel nach unten konvex ist. Da für keinen endlichen Wert von y, $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwindet, so ist kein Wendepunkt vorhanden.

Wir wollen die Sinuslinie untersuchen. Die Gleichung der Sinuslinie ist:

$$y = \sin x.$$

Wir nehmen die Differentialquotienten. Also:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

und
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

Wie man sofort sieht, wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ für die Werte negativ, die zwischen o und π liegen. Die Kurve wird somit dort

nach unten konkav sein. Die Werte zwischen π und 2π eingesetzt in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ergeben ein positives Resultat; und es zeigt sich, daß die Sinuslinie nach unten konvex ist. Zur

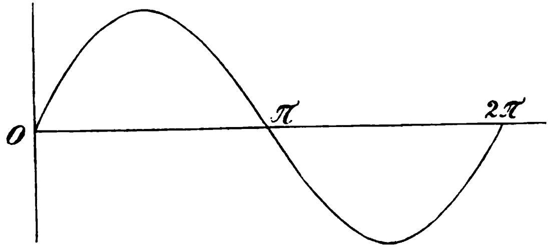


Fig. 18.

Null wird der Differentialquotient für die Werte o, π, 2π ꝛc. Hier befinden sich Wendepunkte und sie liegen alle, wie die Fig. 18 zeigt, auf der Abscissenachse.

Zwölftes Kapitel.

Die Krümmung der Kurven und der Krümmungskreis. Evoluten und Evolventen.

81. Ueber die Berührung von Kurven.

Wenn zwei krumme Linien, die durch die Gleichungen:

1) $$y = f(x) \quad \text{und} \quad y_1 = \varphi(x)$$

dargestellt, und die auf dasselbe Koordinatensystem mit dem gleichen Anfangspunkte bezogen sind, für einen bestimmten Wert von x ein übereinstimmendes Resultat geben, dann müssen sie beide durch denselben Punkt P gehen. Das ist unmittelbar einleuchtend und folgt aus dem Begriff der

Funktion. Lassen wir nun x in den beiden Funktionen um die kleine Größe h zunehmen und entwickeln wir nach dem Taylorschen Satze. Also:

$$2)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x) \, . \, h + f''(x) \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x) \, . \, h + \varphi''(x) \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Sind nun in den Funktionen außer $f(x) = \varphi(x)$ auch noch $f'(x) = \varphi'(x)$, resp. $f''(x) = \varphi''(x)$ 2c. einander gleich, dann findet im Punkte P zwischen den beiden Kurven eine Berührung erster, zweiter u. s. f. Ordnung statt.

Wird sogar $f^n(x) = \varphi^n(x)$, dann ergiebt sich eine Berührung nter Ordnung; die Kurven schwingen sich also am innigsten an einander. Wir wollen diese Auseinandersetzung an einem Beispiel noch klarer machen.

Es sei eine Parabel mit der Formel:

$$y^2 = 4x$$

gegeben. Es soll die parabolische Linie ermittelt werden, die im Punkte P mit den Koordinaten $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ mit der gegebenen Parabel die innigste Berührung hat. — Die Gleichung für die parabolische Linie sei:

$$y_1 = \alpha + \beta x + \gamma x^3.$$

Bilden wir nun die Differentialquotienten aus:

$$y_1 = \alpha + \beta x + \gamma x^3$$

und: $\quad y^2 = 4x$

oder: $\quad y = 2\sqrt{x}$

$$\frac{dy_1}{dx} = \beta + 3\gamma x^2; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 6\gamma x; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

Nach unseren obigen Bemerkungen müssen also, wenn in P eine innige Berührung stattfinden soll, für $x = 4$ auch die Differentialquotienten gleich sein. — Zur Ermittelung der Koeffizienten in der parabolischen Gleichung können dann die folgenden drei Gleichungen aufgestellt werden.

$$\alpha + 4\beta + 64\gamma = 4,$$
$$\beta + 48\gamma = \tfrac{1}{2},$$
$$24\gamma = -\tfrac{1}{16}.$$

Wir erhalten die Werte: $\alpha = \frac{5}{3}$, $\beta = \frac{5}{8}$, $\gamma = -\frac{1}{384}$. Somit hat die gewünschte parabolische Linie die Form:

$$y_{,} = \tfrac{5}{3} + \tfrac{5}{8}x - \tfrac{1}{384}x^3.$$

Es findet also hier eine Berührung zweiter Ordnung statt.

82. Der Krümmungskreis.

In der Theorie über die Krümmung der Kurven spielt die Aufgabe eine wichtige Rolle, den Kreis zu ermitteln, der mit einer Kurve in einem bestimmten Punkt P die innigste Berührung hat. Man nennt diesen Kreis den Krümmungs- oder Oskulationskreis und seinen Radius den Krümmungsradius.

Es sollen von uns im Folgenden die Formeln für den Krümmungsradius und die Koordinaten für den Mittelpunkt des Oskulationskreises bestimmt werden. Dazu wird es gut sein, sich zunächst eine geometrische Vorstellung vom Krümmungskreise zu schaffen. Betrachten wir zu dem Zwecke Figur 19 (S. 120).

Die Kurve HI sei gegeben durch die Gleichung:

3) $$y = f(x).$$

Wir legen an diese Kurve im Punkte P eine Tangente TF und eine Normale PU. Man ist nunmehr im stande von jedem Punkte der Normalen aus Kreise zu schlagen, die die Kurve HI im Punkte P berühren und deren gemeinschaftliche Tangente TF ist.

Derjenige von allen diesen Kreisen, der mit der Kurve HI die innigste Berührung eingeht, ist der Oskulationskreis. — Um nun die gewünschten Bestimmungsstücke zu finden, können wir ähnlich verfahren, wie in der vorbereitenden Aufgabe in Abschnitt 81. — Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes P mit x und y und die Koordinaten vom Mittelpunkte M des Krümmungskreises mit α und β; sein Radius werde mit ϱ bezeichnet.

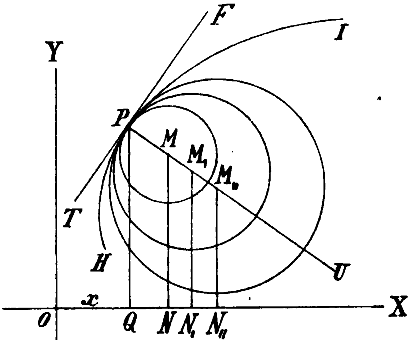


Fig. 19.

Wir werden daher, wie in 81, die Differentialquotienten für die Gleichung der Kurve: $y = f(x)$, und für die Gleichung des Kreises: $(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2$ bilden. Es ist hierzu gut, die Kreisgleichung ein wenig umzuschreiben. Also:

$$4) \quad y_1 = \beta - \left\{ \varrho^2 - (x - \alpha)^2 \right\}^{1/2} \text{ und } y = f(x). \text{ Daher:}$$

$$5) \quad \frac{dy_1}{dx} = - \frac{x - \alpha}{\left\{ \varrho^2 - (x - \alpha)^2 \right\}^{1/2}}; \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x) = p^{*)}$$

$$\frac{d^2x_1}{dx^2} = - \frac{\varrho^2}{\left\{ \varrho^2 - (x - \alpha)^2 \right\}^{3/2}}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = q.$$

---

*) Man bezeichnet sehr häufig nach dem Vorgange von Euler den ersten Differentialquotienten mit p, den zweiten mit q, den dritten mit r etc.

Zur Bestimmung des Oskulationskreises müssen jetzt α, β und ϱ ermittelt werden. Das geschieht durch die drei Gleichungen:

6)
$$\beta + \left\{\varrho^2 - (x - \alpha)^2\right\}^{1/2} = y$$
$$- \frac{x - \alpha}{\left\{\varrho^2 - (x - \alpha)^2\right\}^{1/2}} = p$$
$$- \frac{\varrho^2}{\left\{\varrho^2 - (x - \alpha)^2\right\}^{3/2}} = q.$$

Führen wir die Rechnung nach den Gesetzen der Algebra aus, dann ergiebt sich:

7)
$$\alpha = x - p \cdot \frac{(1 + p^2)}{q}$$
$$\beta = y + \frac{(1 + p^2)}{q}$$
$$\varrho = \pm \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q}.$$

Wir wollen diese Ausdrücke mit Hilfe der Bestimmungen in Abschnitt 68 noch etwas umformen. Dort wurde gezeigt, daß man für $dx^2 + dy = ds^2$ setzen kann. — Schreibt man nun:

8) $p = \frac{dy}{dx}$ und $p^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, dann wird:

8a)
$$1 + p^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Es gehen somit die Formeln 7) über in:

9)
$$\alpha = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q} p$$
$$\beta = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q}$$
$$\varrho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q}.$$

83. Die Krümmung der Kurven.

Von allen krummen Linien hat bekanntlich nur der Kreis stets dieselbe Krümmung und zwar ist diese um so größer, je kleiner der Radius ist. Man pflegt daher die Krümmung eines Kreises dem reciproken Werte des Radius gleich zu setzen. Also:

$$\text{Krümmung} = \frac{1}{r}.$$

Alle anderen Kurven haben in den verschiedenen Punkten verschiedene Krümmungen. Man mißt die Krümmungen, indem man an den einzelnen Punkten ihren Oskulationskreis ermittelt. — Bestimmen wir jetzt den Oskulationskreis für die Parabel. Die Gleichung der Parabel sei:

$$y^2 = 2\alpha x.$$

Wir bilden die Differentialquotienten. Also:

$$2y\,dy = 2\alpha \, . \, dx$$

und daraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{y} = p.$$

(Siehe Anmerkung zu Abschnitt 82.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha^2}{y^3} = q.$$

Entwickeln wir nun die Werte, die in den Formeln 7) hervortreten, und setzen sie in diese ein:

Es ist: $$1 + p^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{y^2} = \frac{\alpha^2 + y^2}{y^2}.$$

Daher:

$$\alpha_1 = x - \frac{\frac{\alpha}{y} \cdot \frac{\alpha^2 + y^2}{y^2}}{-\frac{\alpha^2}{y^3}} = x - \frac{\alpha^2 + y^2}{y^2} \cdot \frac{\alpha}{y} \cdot \left(-\frac{y^3}{\alpha^2}\right)$$

$$= x + \frac{\alpha^2 + y^2}{\alpha} \quad = x + \frac{\alpha^2 + 2\alpha x}{\alpha}$$

$$= x + \alpha + 2x \quad = \alpha + 3x.$$

$$\beta_1 = y + \frac{\frac{a^2+y^2}{y^2}}{-\frac{a^2}{y^3}} = y + \left(\frac{a^2+y^2}{y^2}\right)\cdot\left(-\frac{y^3}{a^2}\right)$$

$$= y - \frac{(a^2+y^2)y}{a^2} = -\frac{y^3}{a^2}.$$

$$\varrho = \pm\frac{\left(\frac{a^2+y^2}{y^2}\right)^{3/2}}{-\frac{a^2}{y^3}} = \pm\frac{(a^2+y^2)^{3/2}}{y^3}\cdot\left(-\frac{y^3}{a^2}\right)$$

$$= \mp\frac{(a^2+y^2)^{3/2}}{a^2}$$

$$= \mp\frac{(a^2+2ax)^{3/2}}{a^2}.$$

Ist hier $x = 0$, dann wird in diesem Punkte:

$$\varrho = \mp a.$$

Der Krümmungsradius im Scheitel der Parabel ist somit gleich dem Parameter. Die Koordinaten α_1 und β_1 des Krümmungskreises werden:

$$\alpha_1 = a \qquad \text{und} \qquad \beta_1 = 0.$$

Der Krümmungsradius ϱ muß natürlich immer positiv sein; man wählt daher dasjenige Vorzeichen, das ihn positiv macht. Für die Parabel ist also der Parameter entscheidend.

84. Evoluten und Evolventen.

Denken wir uns in Fig. 19 (S. 120) statt eines Punktes P eine ganze Zahl auf einander folgender Punkte P_1, P_2, 2c. gezeichnet und für einen jeden den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt konstruiert. Dann giebt die Verbindungslinie aller dieser Krümmungsmittelpunkte eine neue Kurve. Man nennt sie die **Evolute** der gegebenen

Kurve. Die Ursprungskurve bezeichnet man als die **Evolvente.** — Man kann sich die Beziehung der Evolvente und der Evolute durch die folgende Konstruktion leicht vergegenwärtigen. Man zeichne sich eine nach oben konvexe Linie AB und befestige in A einen Faden, der zunächst über die Kurve gespannt sei. — Wird nun, indem man den Faden stets stramm zieht, der Faden abgewickelt, dann beschreibt der Punkt B eine neue Kurve. Diese ist die Evolvente, die Abwickelnde; die ursprünglich konvexe Kurve wird die Evolute oder abgewickelte Linie genannt.

85. Zusammenstellung der Regeln, um die Formen der Kurven zu ermitteln.

Ist von einer Funktion $y = f(x)$:

a) der **erste Differentialquotient** in einem Punkte $(x_1\, y_1)$ der **Null gleich**, dann **läuft seine Tangente** der **x-Achse parallel**;

b) der **erste Differentialqnotient** für einen Punkt $(x_1\, y_1)$ **unendlich**, dann steht **die Tangente** in dem betreffenden Punkte auf der **x-Achse senkrecht**;

c) der **erste Differentialquotient**, wie in a), **gleich Null**, und der **zweite Differentialquotient positiv**, dann hat die **Kurve in diesem Punkte ein Minimum**;

d) der **erste Differentialqnotient**, wie in a), **gleich Null**, und der **zweite Differentialquotient negativ**, dann hat die **Kurve in diesem Punkte ein Maximum**;

e) der **erste Differentialquotient** für einen **bestimmten Wert a**, wie in b), **unendlich** und für:

$$\left.\begin{matrix} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{matrix}\right\},$$ dann findet ein **Maximum** statt;

f) der **erste Differentialquotient** für einen **bestimmten Wert a**, wie in b), **unendlich** und für:

$$\left.\begin{matrix} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) + \end{matrix}\right\},$$ dann findet ein **Minimum** statt.

In e) und f) bedeutet h eine sehr kleine Größe.

g) der **zweite Differentialquotient** für einen Punkt (x y) **positiv**, dann ist die **Kurve nach unten konvex**;

h) der **zweite Differentialquotient** für einen Punkt (x y) **negativ**, dann ist die **Kurve nach unten konkav**;

i) der **zweite Differentialquotient** für einen Punkt (x y) **Null** oder **unendlich**, dann findet in ihm ein **Wendepunkt statt**, wenn:

$$f''(x-h) > 0 \quad \text{und} \quad f''(x+h) < 0$$

oder:

$$f''(x-h) < 0 \quad \text{und} \quad f''(x+h) > 0 \quad \text{ist.}$$

Auch hier bedeutet h eine sehr kleine Größe.

k) In einer Funktion: $y = f(x)$ ist der **Mittelpunkt des Krümmungskreises** bestimmt durch die **Koordinaten**:

$$\alpha = x - p\frac{1+p^2}{q} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q} \cdot p$$

$$\beta = y + \frac{1+p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q}.$$

Und der **Radius** durch die Formel:

$$\varrho = \pm\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q}.$$

Schlüssel für die Untersuchung der Kurven.

$$y = f(x)$$

- $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$
  - $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = +$. Minimum.
  - $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -$. Maximum.
- $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \infty$
  - $\begin{cases} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{cases}$ Maximum.
  - $\begin{cases} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{cases}$ Minimum.
- $\frac{d^2y}{dx^2} = f'' = (x) +$. Konvex.
- $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -$. Konkav.
- $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$
  - $\begin{cases} f''(x-h) > 0 \\ f''(x+h) < 0 \end{cases}$ oder $\begin{cases} f''(x-h) < 0 \\ f''(x+h) > 0 \end{cases}$ Wendepunkt.

Dreizehntes Kapitel.

Die Bildung der Differentialquotienten von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

86. Erklärungen.

Es sei eine Funktion von der Form:

1) $$z = f(x, y)$$

gegeben. In ihr bedeuten im allgemeinen x und y die unabhängigen Variabeln und z die abhängige Variable.

Wir können in der Funktion 1) drei Fälle unterscheiden:

a) Ist x konstant und nur y veränderlich, dann stellt 1) eine Linie dar, die in einer Ebene liegt, welche der **zy-Ebene** des Koordinatensystems parallel ist.

b) Ist dagegen y konstant und x veränderlich, dann liegt die Linie, die die Funktion giebt, in der Ebene, die der **xz-Ebene** parallel ist.

c) Sind endlich x und y veränderlich, dann erhält man durch 1) eine Fläche, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird.

Um das klar zu legen sei z. B.:

$$z = 3x^2 + xy^2 + y^4.$$

Wir wollen zuerst annehmen, daß, wie in dem Fall b), nur x eine Veränderliche sei und y konstant, dann muß sich selbstverständlich auch z verändern. Will man den Differentialquotienten bilden, dann muß man sich bewußt bleiben, daß z sich **nur** in Beziehung auf x verändern soll. Man deutet das dadurch an, daß man die Ableitung mit einem runden ∂ schreibt: Also: $\frac{\partial z}{\partial x}$ statt $\frac{dz}{dx}$.

Man nennt $\frac{\partial z}{\partial x}$ die partielle Ableitung von z nach x, oder den partiellen Differentialquotienten. —

Differentiieren wir in diesem Sinne unser Beispiel:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^2.$$

In gleicher Weise können wir die Funktion z auch nach y differentiieren, dann betrachtet man x als konstant. Also:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 4y^3.$$

87. Ableitung der partiellen Differentialquotienten.

Bei der allgemeinen Ableitung der partiellen Differentialquotienten wollen wir uns der Ueberlegungen erinnern, die wir im vierten Kapitel anstellten. Es sei also:

$$1)\qquad z = f(x, y).$$

Nehmen wir zuerst an, es sei nur x variabel und es wachse um die kleine Größe $\triangle x$. Es ergiebt sich dann:

$$2)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\triangle x = 0} \cdot \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x}.$$

Nehme sodann in derselben Weise y um $\triangle y$ zu, bei konstanten x, dann ist:

$$3)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\triangle y = 0} \cdot \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y}.$$

Die Gleichungen 2) und 3) stellen also ganz allgemein die partiellen Ableitungen von z nach x und nach y dar.

Man pflegt die Gleichungen zuweilen noch in anderer Weise zu schreiben. Man bezeichnet nämlich die Größe, um die sich z ändert, wenn x um $\triangle x$ zunimmt, häufig mit $\triangle_x z$; und die Größe, um die sich z ändert, wenn sich y um $\triangle y$ erweitert, mit $\triangle_y z$. Man nennt dann $\triangle_x z$, bezw. $\triangle_y z$ die partielle Zunahme von z in Beziehung auf x, resp. auf y. — Verwenden wir diese Schreibart, so erhalten wir:

4) $$z + \triangle_x z = f(x + \triangle x, y) \quad \text{und}$$

5) $$z + \triangle_y z = f(x, y + \triangle y).$$

Subtrahieren wir nun von 4) und 5) die Gleichung 1), dann ergeben sich die Ausdrücke:

6) $$\triangle_x z = f(x + \triangle x, y) - f(x, y) \quad \text{und}$$
$$\triangle_y z = f(x, y + \triangle y) - f(x, y).$$

Wir machen nun einen kleinen Kunstgriff und schreiben die Gleichungen 6) in der Form:

7) $$\triangle_x z = \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x} \cdot \triangle x,$$
$$\triangle_y z = \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} \cdot \triangle y.$$

Nähern sich $\triangle x$ und $\triangle y$ der Grenze Null, dann müssen auch $\triangle_x z$ und $\triangle_y z$ unendlich klein werden. Schreibt man:

$$\triangle x = dx \quad \text{und} \quad \triangle y = dy,$$

dann sind auch:

$$\triangle_x z = \partial_x z \quad \text{und} \quad \triangle_y z = \partial_y z.$$

Man bezeichnet solche Ausdrücke als partielle Differentiale.

Die Gleichungen 7) können nach diesen Auseinandersetzungen mit Berücksichtigung der Gleichungen 2) und 3) nun auch geschrieben werden:

8) $$\partial_x z = \lim_{\triangle x = 0} \cdot \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x} \cdot \triangle x = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx,$$
$$\partial_y z = \lim_{\triangle y = 0} \cdot \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} \cdot \triangle y = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Im Vorstehenden haben wir die Fälle a) und b) aus Abschnitt 86 allgemein behandelt und in 8) die partielle Zunahme von z nach x resp. y erhalten. Wir wollen nun den Fall c) allgemein betrachten, in dem in der Funktion

$z = f(x, y)$ sich x und y zusammen um die kleinen Werte $\triangle x$ und $\triangle y$ verändern. Dann bezeichnet man die Aenderung von z als die **totale Zunahme** und schreibt sie $\triangle z$.

Es sei:

1) $$z = f(x, y).$$

Es soll nun, wie bemerkt, x um $\triangle x$ und y um $\triangle y$ wachsen, dann ergiebt sich:

9) $$z + \triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y).$$

Subtrahieren wir 1) von 9), dann ist:

10) $$\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y).$$

Verfahren wir nun mit diesem Ausdruck in derselben Weise, wie wir es im Abschnitt 24, Gleichung 58) (Seite 43) thaten, so gelangen wir sofort zu der Form:

11) $$\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y + \triangle y) + f(x, y + \triangle y) - f(x, y).$$

Um die Ausführungen besser überschauen zu können, wollen wir schreiben:

$$y + \triangle y = u.$$

Dann geht 11) über in:

12) $$\triangle z = f(x + \triangle x, u) - f(x, u) + f(x, y + \triangle y) - f(xy).$$

Ordnen wir nun 12) und dividieren und multiplizieren die entsprechenden Teile mit $\triangle x$ und $\triangle y$, dann erhalten wir:

13) $$\triangle z = \frac{f(x + \triangle x, u) - f(x, u)}{\triangle x} \cdot \triangle x + \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} \cdot \triangle y.$$

Nähern sich $\triangle x$ und $\triangle y$ der Grenze Null, dann geht $\triangle z$ in dz über. Also:

$$14)\qquad dz = \lim_{\triangle x = 0} \cdot \frac{f(x + \triangle x, u) - f(x, u)}{\triangle x} \cdot \triangle x$$

$$+ \lim_{\triangle y = 0} \cdot \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} \cdot \triangle y.$$

Wir setzten nun wieder $u = y + \triangle y$. Der Grenzwert $\lim \cdot u$ wird gleich y, daß für ihn somit $u = y$ ist. Wir schreiben ferner für $\triangle x = 0$, dx und für $\triangle y = 0$, dy.

Aus den Gleichungen 2) und 3) und dem Vorstehenden folgt:

$$15)\quad \lim_{\triangle x = 0} \cdot \frac{f(x + \triangle x, u) - f(x, u)}{\triangle x} = \frac{\partial (x, u)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

und

$$\lim_{\triangle y = 0} \cdot \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial (x, y)}{\partial y}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung 14) ein, dann haben wir die Formel für die gewünschte totale Zunahme der Funktion.

$$16)\qquad dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy,$$

oder kürzer:

$$16\,a)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Das totale Differential ist also der Summe der partiellen Differentiale gleich.

88. Beispiel.

Führen wir die vorstehenden Auseinandersetzungen an unserem Beispiel in Abschnitt 86 weiter aus. Wir hatten dort:

$$z = 3x^2 + xy^2 + y^4 \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 4y^3.$$

In die Gleichung 16 a) eingefügt, ergiebt das:

$$dz = (6x + y^2)dx + (2xy + 4y^3)dy.$$

89. Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln.

Es kommen in der Rechnung zuweilen auch Funktionen vor, in denen mehr als zwei unabhängige Variable sich befinden. Z. B.:

17) $$z = f(r, s, t).$$

Um die Differentialquotienten für sie zu ermitteln, müssen die gleichen Ueberlegungen wie im Abschnitt 87 angestellt werden. Für Gleichung 17) erhält man dann:

18) $$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial s}ds + \frac{\partial z}{\partial t}dt.$$

Der Satz zu 16 a) ist also ein ganz allgemeiner Grundsatz: Das totale Differential ist immer — die Zahl der unabhängigen Variabeln kann beliebig groß sein — gleich der Summe der partiellen Differentialquotienten.

90. Die höheren Differentialquotienten.

Wir wollen nochmals zu unserem Beispiel in Abschnitt 86 zurückkehren und an diesem speziellen Fall die Bildung der höheren Differentialquotienten zeigen. Es war:

$$z = 3x^2 + xy^2 + y^4 \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 4y^3.$$

Differentiieren wir nun nochmals und zwar den Ausdruck, den wir nach x differentiiert haben, nunmehr nach y und den anderen jetzt nach x. — Dann ergiebt sich:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = 2y.$$

Aus diesem Beispiel erkennen wir, daß wir dasselbe Resultat erhalten, gleichgültig ob wir eine Funktion erst nach x und dann nach y, oder erst nach y und dann nach x differentiieren. Der Satz ist von **allgemeiner Bedeutung**: „Die Reihenfolge der partiellen Differentiation ist gleichgültig“. — Es ergiebt sich:

19) $$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Oder zusammengezogen:

19 a) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}.$$

Nach dieser Vorbereitung ist die Ableitung für die zweite Differentiation nicht mehr schwer. Wir erhielten für:

1) $$z = f(x, y):$$

16) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Setzen wir jetzt in 16) überall für z den Ausdruck dz, dann geht 16) über in:

20) $$d\,(dz) = \frac{\partial\,(dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial\,(dz)}{\partial y} dy.$$

Entwickeln wir nun jeden der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite, indem wir einmal nach x und dann nach y differentiieren:

21) $$\frac{\partial\,(dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} dy$$

$$\frac{\partial\,(dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy.$$

Multiplizieren wir endlich der Gleichung 20) entsprechend von den vorstehenden Gleichungen die erste mit dx und die zweite mit dy und addieren, dann erhalten wir den Ausdruck:

22) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} dx \cdot dy,$$

und unter Ansicht von 20):

23) $$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} dx \cdot dy.$$

Wie man sieht, erscheint hier das Gesetz der Binomialkoeffizienten.

Vierzehntes Kapitel.

Entwickelung der Differentialquotienten für die nicht entwickelbaren Funktionen.

91. Allgemeines.

In Abschnitt 12 wurden wir mit Funktionen bekannt, die nicht nach der einen Variablen aufzulösen sind. Wir nannten sie unentwickelte oder implizite Funktionen. Man bezeichnet sie gewöhnlich mit:

1) $F(x, y) = 0;\quad f(x, y) = 0;\quad \psi(x, y) = 0$ ꝛc.

Wir wollen sie auch noch in dem folgenden speziellen Beispiel vorführen:

$$x^3 y + x^y - \sin(x + y) = 0.$$

Es soll nun gezeigt werden, wie man in ihnen die Differentialquotienten ausdrücken kann, ohne sie auflösen zu müssen.

92. Bildung der Differentialquotienten der impliziten Funktionen.

Die Ableitung ist verhältnismäßig einfach mit Anlehnung an die Ausführungen des vorigen Kapitels durchzuführen. —

1) Wir setzen: $F(x, y) = 0.$

Es ist also auch hier y eine Funktion von x, nur ist die Form, in der das Verhältnis zum Ausdruck

kommen soll, nicht unmittelbar bekannt, oder doch nur unter Schwierigkeiten zu entwickeln. Wir wollen daher den nachfolgenden Weg einschlagen, um dahinter zu kommen. Gehen wir von dem entsprechenden Ausdruck des vorigen Kapitels

2) $$z = F(u, v)$$

aus und nehmen an, daß auch u und v Funktionen von x seien, also z. B.:

$$u = \varphi(x) \quad \text{und} \quad v = \psi(x).$$

Differentiieren wir 2), dann folgt:

3) $$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Dividieren wir 3) durch dx, dann geht es über in:

4) $$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Mit Verwendung von Gleichung 2) und indem wir für F (u, v) kurz F setzen, können wir nun wiederum diesen Ausdruck schreiben:

5) $$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Nehmen wir für einen speziellen Fall an, es sei $u = x$, $v = y$ und $z = 0$ geworden, so vereinfachen sich die Ausdrücke, aus denen sich 5) aufbaut, in der folgenden Weise. — Es geht über:

6) $$z = F(u, v) \text{ in } F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \text{ in } \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} \text{ in } \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ in } \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Und es wird endlich:

7) $$\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

sowie: $$\frac{dz}{dx} = 0.$$

Fügen wir die Beziehungen von 6) und 7) in Gleich. 5) ein, dann geht sie nunmehr über in:

8) $$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Daraus ergiebt sich der gesuchte erste Differentialquotient:

9) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}.$$

Häufig bedient man sich zur Aufstellung der Formel 9) einfacherer Ausdrücke für die partiellen Ableitungen. Man schreibt für:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = F_1(x, y)$$

und $$\frac{\partial F(x, y)}{\delta y} = F_2(x, y).$$

Es wird also die Ableitung nach der ersten Variabeln x mit F_1 und die Ableitung nach der zweiten Variabeln y mit F_2 bezeichnet. Dann geht 9) über in:

9 a) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}.$$

93. Beispiele.

1) Die Gleichung eines Kreises:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

sei gegeben. Wie heißt der erste Differentialquotient?

Lösung. Die Gleichung des Kreises wird zuerst nach x und dann nach y differentiiert, wie es in Kapitel 13 auseinandergesetzt wurde:

$$\frac{\partial F(x^2+y^2-r^2)}{\partial x} = F_1(x^2+y^2-r^2) = 2x$$

und: $$\frac{\partial F(x^2+y^2-r^2)}{\partial y} = F_2(x^2+y^2-r^2) = 2y.$$

Setzen wir diese Werte in 9) bezw. 9a) ein, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x^2+y^2-r^2)}{F_2(x^2+y^2-r^2)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

2) Es sei gegeben:

$$\cos x - a\cos y = 0.$$

Bilden wir die partiellen Differentiale:

$$F_1(\cos x - a\cos y) = -\sin x$$
$$F_2(\cos x - a\cos y) = a\sin y.$$

Daher: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(\cos x - a\cos y)}{F_2(\cos x - a\cos y)} = \frac{\sin x}{a\sin y}.$$

3) Es sei gegeben:

$$x^3+y^3-3axy = 0.$$

Bilden wir die partiellen Differentiale:

$$F_1(x^3+y^3-3axy) = 3x^2-3ay$$

und $$F_2(x^3+y^3-3axy) = 3y^2-3ax.$$

Somit: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2-3ax}{3y^2-3ax} = -\frac{3(x^2-ay)}{3(y^2-ax)}$$
$$= \frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

4) Es sei gegeben:

$$e^x - e^y + xy = 0.$$

Die partiellen Differentiale:

$$F_1(e^x - e^y + xy) = e^x + y.$$
$$F_2(e^x - e^y + xy) = - e^y + x.$$

Daher:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + y}{e^y - x}.$$

5) Es sei gegeben:

$$a^{x-y} - x^y = 0.$$

Nochmals die partiellen Differentiale:

$$F_1(a^{x-y} - x^y) = a^{x-y} . \log a - y x^{y-1}$$
$$F_2(a^{x-y} - x^y) = - a^{x-y} . \log a - x^y . \log x.$$

Endlich:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x . \log a - y}{x . \log (a x)}.$$

94. Bildung der höheren Differentialquotienten der impliziten Funktionen.

Bedienen wir uns, um die Ausdrücke übersichtlich zu erhalten, der schon oben verwendeten Ausdrücke für die Differentialquotienten. Also:

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r \quad \text{etc.}$$

Für den ersten Differentialquotienten erhielten wir die Formel:
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = p.$$

Bedienen wir uns jetzt der Formel 16) aus dem Kap. 13, indem wir für $z = f(x, y)$ setzen und durch dx dividieren. Dieselbe empfängt dadurch die Form:

10) $$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Oder kurz:

10a) $$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Setzen wir für f den Ausdruck p, dann wird:

11) $$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot p = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Das ist aber der zweite Differentialquotient.

95. Beispiele.

1) Es sei gegeben:

$$y^2 - 3ax = 0.$$

Bilden wir zuerst die ersten Differentiale:

$$F_1(y^2 - 3ax) = -3a$$

$$F_2(y^2 - 3ax) = 2y.$$

Daher: $$\frac{F_1(y^2 - 3ax)}{F_2(y^2 - 3ax)} = -\frac{-3a}{2y} = \frac{3a}{2y} = p.$$

Es muß nun

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot p$$

gefunden werden. Es ist:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{3a}{2y}\right)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{3a}{2y}\right)}{\partial y} = -\frac{6a}{4y^2} = -\frac{3a}{2y^2}.$$

Also: $$\frac{\partial p}{\partial y} \cdot p = -\frac{3a}{2y^2} \cdot \frac{3a}{2y} = -\frac{9a^2}{4y^3}.$$

Wir erhalten also:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q = -\frac{9a^2}{4y^3}.$$

2) Bilden wir auch den zweiten Differentialquotienten für die Gleichung des Kreises.

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Im Abschnitt 92 erhielten wir bereits:

$$F_1 (x^2 + y^2 - r^2) = 2x$$

$$F_2 (x^2 + y^2 - r^2) = 2y.$$

Also: $$\frac{F_1}{F_2} = \frac{dy}{dx} = p = -\frac{x}{y}.$$

Wir haben also nur noch nötig $\frac{d^2y}{dx^2}$ nach der geschilderten Methode zu ermitteln.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot p.$$

Es ist: $$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{x}{y}\right)}{\partial y} = \frac{x}{y^2}.$$

Endlich das Produkt:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \cdot p = \frac{x}{y^2} \cdot -\frac{x}{y} = -\frac{x^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}.$$

Der Leser möge für die Beispiele, die im Abschnitt 92 gegeben sind, nunmehr auch den zweiten Differentialquotienten bilden.

Fünfzehntes Kapitel.

Vertauschung der unabhängig veränderlichen Größen.

96. Erklärungen.

Zuweilen ist es für die Rechnung vorteilhaft, in einer Funktion $y = f(x)$ oder $f(x, y) = 0$, die eine Veränderliche, z. B. x, durch eine andere Veränderliche t auszudrücken.

Besonders die technische und die wissenschaftliche Mechanik ist reich an Beispielen hierfür. Wir wollen untersuchen, wie in einem solchen Falle die Differentialquotienten zu bilden sind. — In der Funktion:

1) $$y = f(x) \quad \text{resp.} \quad f(x, y) = 0 \qquad \text{sei:}$$

2) $$y = \varphi(t) \quad \text{und} \quad x = \psi(t).$$

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn x eine Funktion von t ist, auch y eine Funktion von t sein muß. Eliminiert man aus den Gleichungen 2) die Variable t, dann erhält man wiederum eine Gleichung zwischen y und x, nämlich:

$$y = f(x).$$

97. Bestimmung der Differentialquotienten.

In den Gleichungen 2) soll sich t um den kleinen Wert $\triangle t$ vermehren, dann werden, wie bekannt, auch x um $\triangle x$ und y um $\triangle y$ wachsen. Also:

3) $$y + \triangle y = \varphi(t + \triangle t) \qquad \text{und:}$$

4) $$x + \triangle x = \psi(t + \triangle t).$$

Entwickeln wir diese Ausdrücke nach dem Taylorschen Satze:

5) $$y + \triangle y = \varphi(t + \triangle t)$$
$$= \varphi(t) + \varphi'(t)\triangle t + \varphi''(t)\frac{\triangle^2 t}{2!} + \cdots$$

6) $$x + \triangle x = \psi(t + \triangle t)$$
$$= \psi(t) + \psi'(t)\triangle t + \psi''(t)\frac{\triangle^2 t}{2!} + \cdots$$

Subtrahieren wir von 5) und 6) die Gleichungen 2), dann folgt:

7) $$\triangle y = \varphi'(t)\triangle t + \varphi''(t)\frac{\triangle^2 t}{2!} + \cdots \qquad \text{und:}$$

8) $$\triangle x = \psi'(t)\triangle t + \psi''(t)\frac{\triangle^2 t}{2!} + \cdots$$

In derselben Weise erhalten wir aus Gleichung 1):

9) $$\triangle y = f'(x) \triangle x + f''(x) \frac{\triangle^2 x}{2!} + \cdots$$

Setzen wir nun in Gleichung 9), wie üblich:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

dann geht sie über in:

10) $$\triangle y = \frac{dy}{dx} \triangle x + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{\triangle^2 x}{2!} + \cdots$$

In Gleichung 10) fügen wir, um auf die neue Veränderliche t zu kommen, jetzt die Werte aus Gleichung 8) ein, dann erhalten wir den ein wenig umständlichen Ausdruck:

11) $$\triangle y = \frac{dy}{dx} \left\{ \psi'(t) \triangle t + \psi''(t) \frac{\triangle^2 t}{2!} + \cdots \right\}$$
$$+ \frac{d^2 y}{2 . dx^2} \left\{ \psi'(t) \triangle t + \psi''(t) \frac{\triangle^2 t}{2!} + \cdots \right\}^2 + \cdots$$

Multiplizieren wir 11) aus und ordnen entsprechend, so wird:

12) $$\triangle y = \frac{dy}{dx} \psi'(t) \triangle t$$
$$+ \left\{ \psi''(t) \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} [\psi'(t)]^2 \right\} \frac{\triangle^2 t}{2!} + \cdots$$

In den Gleichungen 7) und 12) müssen für jedes $\triangle t$, $\triangle^2 t$ 2c. die entsprechenden Koeffizienten gleich sein. Diese Bemerkung führt zu den neuen Gleichungen:

13) $$\frac{dy}{dx} \psi'(t) = \varphi'(t)$$ und:

14) $$\frac{dy}{dx} \psi''(t) + \frac{d^2 y}{dx^2} [\psi'(t)]^2 = \varphi''(t).$$

Lösen wir 13) nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so haben wir den ersten Differentialquotienten:

15) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Lösen wir 14) noch $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf und setzen den Wert von 15) ein, dann ergiebt sich der zweite Differentialquotient:

16) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi''(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi''(t)}{[\psi'(t)]^3}.$$

98. Andere Formen der Differentialquotienten.

Gehen wir wiederum von den beiden Gleichungen 2) aus:

$$y = \varphi(t) \quad \text{und} \quad x = \psi(t).$$

Bilden wir die Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dt} = \varphi'(t) \qquad \frac{dx}{dt} = \psi'(t)$$

$$\text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi''(t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \psi''(t).$$

Setzen wir sie in die Gleichungen 15) und 16) ein. Wir gelangen dann zu den neuen Formeln:

15a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

und

16a) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Verwenden wir endlich die Bezeichnungsweise:

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dy^2}{dx^2} = q.$$

und ziehen die Gleichungen 15a) und 16a) je für sich zusammen, dann können wir diesen Formeln noch die nachstehenden Formen geben:

15b) $$p = \frac{dy}{dx}$$

und

16b) $$q = \frac{d^2y\,.\,dx - dy\,dx^2}{dx^3}.$$

99. Beispiele.

1) Es sei eine Funktion gegeben:

$$y = x \operatorname{tang} \alpha.$$

Im Laufe der Rechnung ergiebt sich, daß es vorteilhaft sei, eine neue Veränderliche einzuführen. Man setzt daher:

$$x = t \cos \alpha \quad \text{und} \quad y = t \sin \alpha.$$

Bilden wir nun nach 15a) und 16a) die Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dt} = \sin \alpha; \quad \frac{dx}{dt} = \cos \alpha.$$

Also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tang} \alpha.$$

2) Es sollen für die Koordinaten x und y gesetzt werden:

$$x = \frac{2t}{1+t} \quad \text{und} \quad y = \frac{1-t}{1+t}.$$

Bilden wir die Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t).2 - 2t}{(1+t)^2} = \frac{2 + 2t - 2t}{(1+t)^2} = \frac{2}{(1+t)^2}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2} = \frac{-2}{(1+t)^2}.$$

Daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2}{2} = -1.$$

3) Es sei:

$$y = a(1 - \cos t); \quad x = a(t - \sin t).$$

Die Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dt} = a.\sin t; \quad \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t).$$

Somit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a.\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Verändern wir die trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin \alpha = 2 . \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

und $$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$ dann wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \cot \frac{t}{2}$$

der zweite Differentialquotient nach Formel 16 b). Dazu bilden wir uns noch:

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = a \cos t \quad \text{und} \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = a \sin t.$$ Daher:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{a^2 (\cos t - 1) \, d t^3}{a^3 (1 - \cos t)^3 \, d t^3} = - \frac{1}{a (1 - \cos t)^2} .$$

Dritter Teil.

Die Integralrechnung.

Sechzehntes Kapitel.

Die Integralformeln.

100. Erklärungen.

Die Integralrechnung ist das Umgekehrte der Differentialrechnung. Ist z. B. das Differential von x^3, wie wir wissen, gleich $3x^2dx$, so ist das Integral von $3x^2dx$ wiederum x^3. — Die beiden Operationen des Differentiierens und Integrierens heben sich somit gegenseitig auf. Um anzudeuten, daß zu einem Differential das Integral gesucht werden soll, stellt man vor den Differentialausdruck das Zeichen „$\int$“, welches von Leibniz eingeführt worden ist und ein langgezogenes „S“ darstellen soll. Später werden wir in der That sehen, daß man ein Integral als eine Summe betrachten kann. — In mathematischen Zeichen stellt sich nun unser obiges Beispiel so dar:

$$d.(x^3) = 3x^2dx$$

$$\int 3x^2dx = x^3.$$

Oder ganz allgemein:

Ist: $d \cdot f(x) = f'(x)\,dx$,

dann ergiebt: $\int f'(x)\,dx = f(x)$.

Die Aufgabe der Integralrechnung besteht also darin, zu einem Differential die ursprüngliche Funktion zu finden.

Das geschieht dadurch, daß man sich der in der Tafel der Differentialquotienten auf Seite 56 zusammengestellten Formeln bedient.

Ein Beispiel mag das noch erläutern.

Es soll das Differential von:

1) $$y = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$ ermittelt werden.

Das ergiebt:

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(m+1)\,x^m}{m+1} = x^m$$

oder: $$dy = x^m \cdot dx.$$

Diese Lösung giebt uns die Tafel der Differentialquotienten. Also ist umgekehrt:

3) $$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Sei, um es noch zu erleichtern, $m = 3$, dann ergiebt sich:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{m+1} = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}\,x^4.$$

Wir können die vorstehende Aufgabe auch in eine leichte Regel kleiden. Das Integral aus einer Potenz ist gleich einer Potenz von der gleichen Basis und dem um Eins vermehrten Exponenten dividiert durch diesen neuen Exponenten. Wir wollen diesen neuen Fall noch näher untersuchen. Sei eine Funktion:

4) $$y = 3x^2 + 4$$

gegeben. Differentiieren wir:

5) $$dy = 6x\,dx.$$

Das Differential der 4 ist Null, wie wir wissen, da das Differential einer jeden konstanten Zahl der Null gleich wird.

Also: $y = a$, ist $\frac{dy}{dx} = 0$.

Wir wollen nun durch Integration aus 5) den ursprünglichen Ausdruck zu erhalten suchen.

6) $$\int 6x\,dx = \frac{6x^2}{2} = 3x^2.$$

Wie wir sehen, fehlt die Konstante 4. Man erhält also durch die Integration mit Hilfe der Formeln die Konstanten nicht unmittelbar. Man muß daher zu jeder Integration ein allgemeines konstantes Glied hinzufügen. Wir werden später sehen, wie man die bestimmte Konstante zu ermitteln vermag. Somit müssen wir jetzt für 6) schreiben:

6a) $$\int 6x\,dx = 3x^2 + C.$$

C bedeutet die Konstante.

Auch die allgemeine Formel in 3) muß übergehen in:

3a) $$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Stellen wir uns nun zunächst zur Uebung die wichtigsten Integralformeln zusammen. Vergleiche Seite 56.

101. Formeln für die Integration.

1) $$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{x} = l x + C.$$

3) $$\int e^x . dx = e^x + C.$$

4) $$\int a^x . dx = \frac{a^x}{la} + C.$$

5) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

6) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C.$$

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C.$$

10) $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x + C.$$

11) $$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C.$$

12) $$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc} \sec x + C.$$

102. Einige allgemeine Integrationssätze.

Die Ausführung der Integration wird wesentlich erleichtert durch die Kenntnis einiger Sätze von allgemeiner Bedeutung, die wir vorausschicken wollen.

a) Wenn das Differential unter dem Integralzeichen mit einem konstanten Faktor behaftet ist, dann kann man ihn immer **vor** das Integralzeichen stellen. Also:

7) $$\int a f'(x) \, dx = a \int f'(x) \, dx.$$

Oder ein praktischer Fall:

$$\int 4 x^2 \, dx = 4 \int x^2 \, dx.$$

b) Soll eine Anzahl von Differentialen integriert werden, die durch + oder —Zeichen mit einander verbunden sind, dann bestimmt man einzeln die Integrale der Differentiale. Also:

8) $$\int\{F'(x)\,dx + f'(x)\,dx - \varphi'(x)\,dx\}$$
$$= \int F'(x)\,dx + \int f'(x)\,dx - \int \varphi'(x)\,dx.$$

Ein spezielles Beispiel:

$$\int\{4x^2\,dx + \sin x\,dx\} = 4\int x^2\,dx + \int \sin x\,dx$$
$$= \frac{4x^3}{3} - \cos x + C.$$

103. Uebungen.

Wir wollen das bisher Vorgetragene zunächst an Beispielen einüben. Wir werden jedoch bei dieser Gelegenheit zur Erkenntnis einiger Sätze gelangen, denen eine allgemeine Bedeutung zukommt.

1) $$\int 6x^4\,dx = \frac{6x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{6x^5}{5} + C.$$

2) $$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C$$
$$= 3/4\,x^{4/3} + C = 3/4\,\sqrt[3]{x^4} + C.$$

3) $$\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = 5\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} = 5/4\,x^4 + C.$$

4) $$\int \frac{2}{3x^5}\,dx = 2/3\int\frac{1}{x^5}\,dx = 2/3\int x^{-5}\,dx$$
$$= 2/3\,\frac{x^{-5+1}}{-4} + C = -1/6\,x^{-4} + C = -\frac{1}{6x^4} + C.$$

5) $$\int x^{-1}.\,dx = \int\frac{dx}{x} = lx + C.$$

Die Aufgabe 5) führt auf einen solchen Fall. Zunächst sieht man, daß die Integralformel 1) in 2) übergeht, wenn der Exponent $m = -1$ wird. Sodann entsteht die Regel:

Ist der Zähler eines Bruches das Differential des Nenners, dann ist sein Integral dem natürlichen Logarithmus des Nenners gleich.

6) Z. B. $$\int \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x) + C.$$

Denn differentiieren wir $1+x$, so erhalten wir dx; also ist hier der Zähler das Differential des Nenners. — In gleicher Weise:

7) $$\int \frac{dx}{x-a} = l\,.\,(x-a) + C.$$

8) $$\int \left\{ x^3 - 7\sqrt{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6} \right\} dx$$

$$= \int x^3\,dx - 7\int \sqrt{x}\,dx - 11\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} + 5\int \frac{dx}{x^6}$$

$$= \int x^3\,dx - 7\int x^{1/2}\,dx - 11\int x^{-5/3}\,dx + 5\int x^{-6}\,dx.$$

Integrieren wir einzeln:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$7\int x^{1/2}\,dx = 7\cdot\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{7\,x^{3/2}}{3/2} = {}^{14}/_3\,\sqrt{x^3} + C.$$

$$11\int x^{-5/3}\,dx = 11\cdot\frac{x^{-5/3+1}}{-5/3+1} = \frac{11\,.\,x^{-2/3}}{-\,2/3} = -\,\frac{33}{2\,.\,\sqrt[3]{x^2}} + C.$$

$$5\int x^{-6}\,dx = 5\cdot\frac{x^{-6+1}}{-6+1} = \frac{5\,.\,x^{-5}}{-\,5} = -\,x^{-5} = -\,\frac{1}{x^5} + C.$$

Ziehen wir die Ausdrücke zusammen, dann ergiebt das Integral:
$$\int \left\{ x^3 - 7\sqrt{x} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x^6} \right\} dx$$

$$= {}^1/_4\,x^4 - {}^{14}/_3\,\sqrt{x^3} + \frac{33}{2\,.\,\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^5} + C.$$

In C sind natürlich alle einzelnen Konstanten enthalten.

9)
$$\int\{3x^5+\cos x-e^x\}dx$$
$$=\int 3x^5\,dx+\int\cos x\,dx-\int e^x\,dx$$
$$3\int x^5\,dx=\frac{3x^6}{6}=\tfrac{1}{2}x^6+C.$$
$$\int\cos x\,dx=\sin x+C.$$
$$\int e^x\,dx=e^x+C.$$
Daher:
$$\int\{3x^5+\cos x-e^x\}dx=\tfrac{1}{2}x^6+\sin x-e^x+C.$$

104. Erleichterung der Integration durch Substitution.

Nicht immer erscheinen die Differentiale in so übersichtlicher Form, wie bisher, daß man sofort das Integral finden kann. Man muß sich dann dadurch helfen, daß man durch eine geschickte **Substitution** das Differential so umformt, daß es einer Integralformel entspricht. — Auch hier wollen wir an Beispielen das Gesagte klar zu machen suchen.

105. Beispiele.

1)
$$\int\frac{dx}{a+bx}=?$$

Um eine bekannte Form hervortreten zu lassen, schreiben wir:
$$u=a+bx.$$

Dann ist: $du=b\,dx$ und $dx=\frac{du}{b}$.

Setzen wir die neuen Werte ein, dann geht unser Integral über in:
$$\int\frac{dx}{a+bx}=\int\frac{1}{b}\cdot\frac{du}{u}=\frac{1}{b}\int\frac{du}{u}$$
$$=\frac{1}{b}\,l\,.\,u=\frac{1}{b}\,.\,l\,(a+bx)+C.$$

2) Der Leser erweise nach gleicher Methode, daß

$$\int \frac{n\,x\,dx}{a + b\,x^2} = \frac{n}{2\,b}\, l\,(a + b\,x^2) \text{ ist.}$$

3) $$\int e^{a\,x}\,dx = ?$$

Man setzt: $u = a\,x; \quad x = \frac{u}{a}.$

Differentiiert: $dx = \frac{d\,u}{a}.$

Eingesetzt:

$$\int e^{a\,x}\,dx = \int \frac{e^u\,.\,du}{a} = \frac{1}{a}\int e^u\,du = \frac{1}{a}\,e^u + C = \frac{1}{a}\,e^{a\,x} + C.$$

4) $$\int \cos a\,x\,dx = ?$$

Man setzt: $a\,x = u; \quad x = \frac{u}{a}; \quad dx = \frac{du}{a}.$

Also: $$\int \cos a\,x\,dx = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\cdot \sin u + C$$

$$= \frac{1}{a}\,\sin a\,x + C.$$

5) $$\int \sin\,(a + b\,x)\,dx = ?$$

Gesetzt: $a + b\,x = u; \quad x = \frac{u - a}{b}; \quad dx = \frac{b\,du}{b^2} = \frac{du}{b}.$

Daher: $$\int \sin\,(a + b\,x)\,dx = \frac{1}{b}\int \sin u\,.\,du$$

$$= -\frac{1}{b}\cos u = -\frac{1}{b}\cos\,(a + b\,x).$$

6) $$\int \frac{d\,x}{a^2 + x^2} = ?$$

In diesem Falle ist es praktisch für x den Wert a u einzuführen. Also:

$$x = a\,u; \quad u = \frac{x}{a}; \quad dx = a\,du.$$

Eingesetzt:
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a\,du}{a^2+a^2u^2}$$
$$=\int\frac{a\,du}{a^2(1+u^2)}$$
$$=\frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2}.$$

Nach Formel 10) unserer Integralformeln Seite 149 ist aber:
$$\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arc\,tang}u+C.$$

Daher:
$$\frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arc\,tang}u+C.$$

Setzen wir jetzt die alten Werte wieder ein:
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

7)
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=?$$

Bedenken wir, daß man schreiben kann:
$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{2a}{x^2-a^2}.$$
Daher:
$$\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{2a}{2a(x^2-a^2)}dx=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx.$$

Setzen wir die Werte ein:
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}dx.$$

Nun ist, wie wir uns erinnern:
$$\int\frac{dx}{x-a}=l\,(x-a)$$
und
$$\int\frac{dx}{x+a}=l\,(x+a).$$

Das eingefügt, ergiebt:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\{l.(x-a)-l(x+a)\}+C,$$

und gedenken wir der logarithmischen Regeln:

$$=\frac{1}{2a}l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+C.$$

8) $\int\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=?$

Setzen wir wiederum:

$$x=au;\quad u=\frac{x}{a};\quad dx=a\,du.$$ Somit:

$$\int\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2du}{\sqrt{a^2-a^2u^2}}=\int\frac{a^2du}{a\sqrt{1-u^2}}=a\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Nach der Formel 9) der Integraltafel Seite 149 ist:

$$a\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=a.\text{arc sin}\,u+C.$$ Also:

$$\int\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a.\text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

9) $\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2}=?$

Wir setzen:

$$a^2+x^2=u;\quad 2x\,dx=du;\quad x\,dx=\frac{du}{2}.$$

In 9) eingefügt, ergiebt:

$$\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{du}{u}$$

$$=\tfrac{1}{2}lu+C$$

$$=\tfrac{1}{2}l(a^2+x^2)+C.$$

10) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

Setzen wir in diesem Falle:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = u; \quad a^2 - x^2 = u^2. \qquad \text{Daher:}$$

$$2u\,du = -2x\,dx; \quad x\,dx = -\frac{2u\,du}{2} = -u\,du.$$

Fügen wir ein:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{u\,du}{u} = -\int du$$

$$= -u = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Möge in der gleichen Weise der Leser zur Uebung beweisen, daß:

11) $\int \frac{a\,x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -a\sqrt{a^2 - x^2} + C,$ und:

12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2} + C$ sei.

13) $\int \frac{dx}{x} \cdot lx = ?$

Man setzt $lx = u$, dann ist $\frac{dx}{x} = du$.

Gerade aus diesem Beispiel kann man gut ersehen, wie reifliche Ueberlegung zu einer geschickten Substitution führt!

Eingefügt:

$$\int \frac{dx}{x} lx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}(lx)^2 + C.$$

14) Der Leser beweise noch, daß:

$$\int \frac{dx}{x\,lx} = l \cdot (lx) \qquad \text{ist.}$$

106. Die Integrale einiger trigonometrischen Funktionen.

Von den nachfolgenden zusammengesetzten trigonometrischen Ausdrücken wollen wir die Integrale bestimmen.

1) $\int \sin x \,.\, \cos x \, dx = ?$

Setzen wir:

$$\sin x = u, \quad \text{dann ist auch} \quad \cos x \, dx = du.$$

Eingesetzt:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C$$
$$= \tfrac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

2) $\int \operatorname{tang} x \, dx = ?$

Wir setzen zunächst:

$$\int \operatorname{tang} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Nun ist, wenn wir $\cos x = u$ setzen, $du = -\sin x \, dx$.
Daher:

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\operatorname{l} u + C$$
$$= -\operatorname{l} \cos x + C.$$

3) $\int \cot x \, dx = ?$

Wir schreiben:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x}.$$

Setzen wir hier $\sin x = u$, dann wird $\cos x \, dx = du$.
Also:

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u} = \operatorname{l} u + C$$
$$= \operatorname{l} \sin x + C.$$

4) $\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} = ?$

Bekanntlich lehrt die Trigonometrie, daß:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ist. Wir dürfen daher unseren Ausdruck auch so schreiben:

$$\int \frac{dx}{\sin x \, . \, \cos x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\sin x \, . \, \cos x}.$$

Trennen wir den Ausdruck, so wird:

$$\int \frac{dx}{\sin x \, . \, \cos x} = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x \, . \, \cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \, . \, \cos x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \operatorname{tang} x \, dx + \int \cot x \, dx$$

$$= - l(\cos x) + l(\sin x)$$

$$= l\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= l(\operatorname{tang} x) + C.$$

5) $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Um den vorstehenden Ausdruck bequem integrieren zu können, setzt man am besten:

$$x = 2u; \quad \text{daher} \quad dx = 2du.$$

Es ergiebt sich dann:

$$\sin x = \sin 2u.$$

Und unter Verwendung der bekannten trigonometrischen Formel:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sin x = \sin 2u = 2 \sin u \, . \, \cos u.$$

Setzen wir ein:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2du}{2 \sin u \, . \, \cos u} = \int \frac{du}{\sin u \, . \, \cos u} = l(\operatorname{tang}) u + C.$$

Also:
$$\int\frac{dx}{\sin x}=l\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}+C,$$
oder auch:
$$=-l\left\{\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right\}+C.$$

6) $\int\frac{dx}{\cos x}=?$

Wir können mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung:
$$\cos a=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right),$$
dieses Integral auf das vorige zurückführen. Also:
$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

Setzen wir nun:
$$\frac{\pi}{2}-x=u,\quad \text{und}\quad du=-dx,$$
dann wird:
$$\int\frac{dx}{\cos x}=-\int\frac{du}{\sin u}+C$$
$$=-l\left[\operatorname{tang}\left(\frac{u}{2}\right)\right]+C$$
$$=-l\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]+C$$
$$=l\left[\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]+C.$$

107. Die Integration rationaler gebrochener Funktionen.

Die **gebrochenen rationalen Funktionen** zerfallen in **echt** und **unecht gebrochene Funktionen**. In den **ersteren** ist der **Grad** des **Zählerausdruckes** niedriger

als der Grad des Nenners. Die unecht gebrochenen rationalen Funktionen zeigen das umgekehrte Verhältnis. Es ist z. B.:

$$\frac{3x+4}{x^2+4x-2} \quad \text{eine echt gebrochene rationale Funktion,}$$

$$\frac{x^3+8x^2+12x-6}{x^2+x-2} \quad \text{eine unecht gebrochene rationale Funktion.}$$

Die Algebra lehrt, daß sich eine jede unecht gebrochene rationale Funktion stets in eine echt gebrochene rationale Funktion, vermehrt um eine ganze Funktion, verwandeln läßt.

Es ist, um das auszuführen, nur nötig, mit dem Nenner in den Zähler zu dividieren. Wir wollen das an unserem Beispiele zeigen:

$$\begin{array}{l}
x^3+8x^2+12x-\ \ 6 : x^2+x-2 = x+7 \\
\underline{x^3+\ \ x^2-\ \ 2x\qquad\ } \\
\qquad 7x^2+14x-\ \ 6 \\
\qquad \underline{7x^2+\ \ 7x-14} \\
\qquad\qquad\ \ 7x+\ \ 8
\end{array}$$

Wir haben also:

$$\frac{x^3+8x^2+12x-6}{x^2+x-2} = x+7+\frac{7x+8}{x^2+x-2}.$$

Es ist also nur notwendig noch Methoden zu suchen, mit deren Hilfe es möglich wird echt gebrochene rationale Funktionen zu integrieren.

Wir wollen die Integration einer gebrochenen rationalen Funktion zunächst an einem ganz einfachen Beispiel vorführen. Es soll bestimmt werden:

$$\int \frac{(x^4-6x^3+13x^2-10x+3)dx}{x-2} = ?$$

Trennen wir durch Division die ganze Funktion von der echt gebrochenen:

$$
\begin{array}{l}
x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 3 : x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x + \frac{3}{x-2} \\
\underline{x^4 - 2x^3} \\
\quad - 4x^3 + 13x^2 \\
\quad \underline{- 4x^3 + 8x^2} \\
\qquad\qquad 5x^2 - 10x \\
\qquad\qquad \underline{5x^2 - 10x} \\
\qquad\qquad\qquad + 3.
\end{array}
$$

Das gegebene Integral zerfällt somit in eine Reihe von Integralen:

$$\int \frac{(x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 3)\,dx}{x - 2}$$

$$= \int x^3 dx - \int 4x^2 dx + \int 5x\,dx + \int \frac{3\,dx}{x-2}.$$

Mit Hilfe der vorgetragenen Methoden ergiebt sich:

$$\int x^3 dx - 4\int x^2 dx + 5\int x\,dx + 3\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 + 3\,.\,l(x-2) + C.$$

Die Integration des Bruches ergab sich hier unmittelbar aus der schon früher ermittelten Form. Der Bruch ist aber in den meisten Fällen nicht so einfach und muß dann in Partialbrüche zerlegt werden. Diese Operationen verlangen oft umfangreiche algebraische Untersuchungen. Die Integration rationaler gebrochener Funktionen nimmt daher in größeren mathematischen Werken einen recht bedeutenden Raum ein. Wir können uns hier nur mit den einfachsten Fällen beschäftigen.

108. Untersuchung einer echt gebrochenen rationalen Funktion, in der der Nenner ein Ausdruck zweiten Grades ist.

Schon im vorigen Abschnitt traten uns solche Ausdrücke in der Form, z. B.: $\frac{7x+8}{x^2+x-2}$ entgegen. Allgemein erscheint der Ausdruck in der Form:

1) $$\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}.$$

Der Ausdruck 1) soll in Partialbrüche zerlegt werden. Zu dem Zwecke bestimmen wir die Wurzeln der Gleichung: $x^2 + 2ax + b$. Sie seien: $x_1 = \alpha$; $x_2 = \beta$. Wir können demnach nach den Regeln der Algebra schreiben:

$$2)\qquad x^2 + 2ax + b = (x - \alpha)(x - \beta).$$

Sind die Wurzeln unserer Gleichung reell, dann ist:

$$3)\qquad \frac{mx + n}{x^2 + 2ax + b} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Die beiden Brüche rechts sind die Partialbrüche, die wir zu bestimmen haben. Das geschieht bekanntlich leicht durch Multiplikation. Multiplizieren wir Gleichung 3) zuerst mit $x - \alpha$:

$$4)\qquad \frac{(mx + n)(x - \alpha)}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A(x - \alpha)}{x - \alpha} + \frac{B(x - \alpha)}{x - \beta}.$$

Fassen wir 4) züsammen:

$$5)\qquad \frac{mx + n}{x - \beta} = A + \frac{B(x - \alpha)}{x - \beta}.$$

Setzen wir nun, zur Ermittelung von A, $x = \alpha$, dann ergiebt sich:

$$6)\qquad A = \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta}.$$

Zur Feststellung von B verfahren wir in der gleichen Weise. Also:

$$7)\qquad \frac{mx + n}{x - \alpha} = \frac{A(x - \beta)}{x - \alpha} + B.$$

Wird nun $x = \beta$, dann ergiebt sich:

$$8)\qquad B = \frac{m\beta + n}{\beta - \alpha} \qquad \text{oder:}$$

$$= -\frac{m\beta + n}{\alpha - \beta}.$$

Werden die Ausdrücke für A und B in die Gleichung 3) eingesetzt, so ist endlich:

9) $$\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}=\frac{\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}}{x-\alpha}-\frac{\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}}{x-\beta}.$$

Die beiden Brüche rechts setzen jetzt der Integration keine Schwierigkeiten mehr entgegen.

Wir wollen das ausführen:

10) $$\int\frac{(mx+n)dx}{x^2+2ax+b}$$

$$=\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\alpha}-\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\beta}$$

$$=\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}l(x-\alpha)-\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}l(x-\beta).$$

109. Beispiele.

Wir wollen nun diese allgemeinen Betrachtungen an speziellen Beispielen noch klarer zu machen suchen. Das Integral von $\frac{7x+8}{x^2+8-2}$ soll bestimmt werden.

$$\int\frac{(7x+8)\,dx}{x^2+x-2}=?$$

Nach der allgemeinen Anleitung müssen zuerst die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2+x-2=0$$

ermittelt werden. Wir finden:

$$x_1=\alpha=1 \quad \text{und} \quad x_2=\beta=-2.$$

Das ergiebt weiter:

$$\frac{7x+8}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

Und: $$\frac{7x+8}{x+2}=A+\frac{B(x-1)}{x+2}.$$

Setzen wir jetzt $x = 1$, dann ergiebt sich A.

$$A = \frac{7 + 8}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5.$$

Führen wir die gleiche Rechnung für B durch:

$$\frac{7x + 8}{x - 1} = \frac{A(x + 2)}{x - 1} + B.$$

Da $x = -2$, wird, so folgt:

$$B = \frac{-14 + 8}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Setzen wir ein:

$$\int \frac{(7x + 8)\,dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{5\,dx}{x - 1} + \int \frac{2\,dx}{x + 2}$$

$$= 5 \int \frac{dx}{x - 1} + 2 \int \frac{dx}{x + 2}$$

$$= 5 \,.\, l(x - 1) + 2 \,.\, l(x + 2) + C.$$

Mag der Leser erweisen, daß:

$$\int \frac{(2x + 6)\,dx}{2x^2 + 3x + 1} = 5\,l(x + \tfrac{1}{2}) - 4\,l\,.\,(x + 1) \quad \text{ist.}$$

Siebzehntes Kapitel.

Die teilweise Integration. Formeln.

110. Erklärung.

Die partielle oder teilweise Integration ermöglicht es, in vielen Fällen eine schwierige Integration auf eine einfache zurückzuführen. Man kann deshalb mit ihrer Hilfe nicht nur komplizierte Aufgaben verhältnismäßig leicht lösen, sondern durch sie auch Formeln erhalten, die zusammengesetzte Formen vereinfachen.

111. Entwickelung.

Es seien:

1) $$u = f(x); \quad v = \varphi(x)$$

zwei beliebige Funktionen von x. Wir wissen dann aus der Differentialrechnung, daß die Beziehung gilt:

2) $$d(u.v) = u\,dv + v\,du.$$

Integrieren wir, dann ist:

3) $$uv = \int u\,dv + \int v\,du.$$

Daher auch:

4) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Wie wir aus dieser Umformung ersehen, stellt sich uns die partielle Integration als ein sehr geschickter Kunstgriff dar. Die folgenden Beispiele mögen das klar machen.

112. Beispiele.

1) $\int x e^x\,dx = ?$

Setzen wir:

$$x = u \quad \text{und} \quad e^x dx = dv,$$

so wird nach Formel 4) in 111:

$$\begin{aligned}\int x.e^x dx &= x.e^x - \int e^x.dx \\ &= x.e^x - e^x \\ &= e^x(x-1) + C.\end{aligned}$$

2) $\int lx.dx = ?$

Es sei: $u = lx$ und $dx = dv.$

Also ist: $$\begin{aligned}\int lx\,dx &= (lx).x - \int x.\frac{dx}{x} \\ &= x(lx) - \int dx \\ &= xl(x) - x \\ &= x(l[x] - 1).\end{aligned}$$

3) $\int x^2 \, l\, x \, dx = ?$

Setzen wir: $u = l(x); \quad dv = x^2 dx.$

Also:

$$\int l x \,.\, x^2 dx = l x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= l x \cdot \frac{x^3}{3} - {}^1/_3 \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot l x - {}^1/_3 \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} (l x - {}^1/_3).$$

4) $\int x \,.\, e^{mx} \, dx = ?$

Wir schreiben: $u = x; \quad e^{mx} dx = dv.$

Also:

$$\int x \,.\, e^{mx} dx = x \cdot \frac{1}{m} e^{mx} - \int \frac{e^{mx}}{m} dx$$

$$= x \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \frac{1}{m} \int e^{mx} dx.$$

Da $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} \cdot e^{mx}$ ist, so wird:

$$\int x \,.\, e^{mx} dx = x \cdot \frac{e^{mx}}{m} - \frac{1}{m^2} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{e^{mx}}{m} \left(x - \frac{1}{m} \right).$$

5) $\int x \,.\, \cos x \, dx = ?$

Werde gesetzt:

$$u = x \quad \text{und} \quad \cos . x \, dx = dv.$$

Es ist nun:

$$\int x \,.\, \cos x \, dx = x \,.\, \sin x - \int \sin x \, dx.$$

$$\int \sin x \, dx = - \cos x.$$

Somit: $\int x \,.\, \cos x \, dx = x \,.\, \sin x + \cos x.$

113. Erweiterte Beispiele.

Nicht selten kommt es vor, daß man die Methode der teilweisen Integration mehrmals wiederholen muß, bis die Integrale auf so einfache Formen gebracht sind, daß man das Schlußintegral unmittelbar hinschreiben kann. In einem solchen Falle wird natürlich das Resultat durch eine Anzahl von Ausdrücken dargestellt werden. Auch das mag durch Beispiele seine Erläuterung finden.

1) $\int x^3 \,.\, e^x dx = ?$

Setzen wir: $u = x^3$ und $e^x dx = dv$.

Es ist dann:

$$\int x^3 \,.\, e^x dx = x^3 \,.\, e^x - \int e^x \,.\, 3x^2 dx$$

$$= x^3 \,.\, e^x - 3\int x^2 \,.\, e^x \,.\, dx.$$

Wir behandeln nun das vereinfachte Integral:

$$-3\int x^2 \,.\, e^x dx = -3x^2 \,.\, e^x + 2 \,.\, 3\int x \,.\, e^x dx.$$

Und wiederum.

$$+2 \,.\, 3\int x \,.\, e^x dx = +2 \,.\, 3 \,.\, x \,.\, e^x - 2 \,.\, 3\int e^x dx.$$

Endlich: $-2 \,.\, 3\int e^x dx = -2 \,.\, 3 \,.\, e^x.$

Durch Addition ergiebt sich nun:

$$\int x^3 \,.\, e^x dx = x^3 \,.\, e^x - 3x^2 \,.\, e^x + 2 \,.\, 3x \,.\, e^x - 2 \,.\, 3e^x.$$

$$= e^x \{x^3 - 3x^2 + 2 \,.\, 3x - 2 \,.\, 3\}.$$

2) $\int x^2 \cos x \, dx = ?$

Wir schreiben: $x^2 = u$; $\cos x \, dx = dv$. Daher:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \,.\, \sin x - 2\int x \,.\, \sin x \,.\, dx$$

$$-2\int x \,.\, \sin x = 2x \cos x - 2\int \cos x \, dx$$

$$-2\int \cos x \, dx = -2 \sin x.$$

Addiert:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x$$
$$= \sin x\,(x^2 + 2x - 2).$$

3) $\int \cos^2 x\, dx = ?$

Wir wollen in diesem Falle unser Integral schreiben:

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x \cdot \cos x \cdot dx.$$

Es wird: $\cos x = u$ und $\cos x\, dx = dv$. Also:

$$\int \cos x \cdot \cos x \cdot dx = \cos x \cdot \sin x + \int \sin x \cdot \sin x\, dx$$
$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \cdot dx.$$

Man kann nun setzen:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Dann wird:

$$\int \cos^2 x\, dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx$$
$$= \cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \cos^2 dx.$$

Bringen wir nun den negativen Ausdruck auf die linke Seite, so haben wir:

$$2\int \cos^2 x\, dx = \cos x \cdot \sin x + \int dx$$

und $$\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \tfrac{1}{2} \int dx$$
$$= \tfrac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{x}{2} = \tfrac{1}{2} (\cos x \cdot \sin x + x).$$

4) In der gleichen Weise möge der Leser zeigen, daß:

$$\int \sin^2 x\, dx = -\tfrac{1}{2} (\sin x \cdot \cos x - x) \text{ ist.}$$

5) $\int \sin^2 x\, dx + \int \cos^2 x\, dx = ?$

Der Wert des Integrals läßt sich sofort durch Addition der Beispiele 3) und 4) feststellen. Aber auch durch eine sehr leichte Betrachtung. Denn:

$$\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$$
$$= \int dx$$
$$= x.$$

6) $\int \text{arc}\sin x\,dx = ?$

Wir setzen: $u = \text{arc}\sin x$ und $dv = dx$.

$$\int \text{arc}\sin x\,dx = x\,.\,\text{arc}\sin x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Denn nach Formel 14 der Tafel der Differentialquotienten auf Seite 56 ist:

$$d(\text{arc}\sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ haben wir bereits ermittelt. Wir fanden in Abschnitt 105 Aufgabe 10:

$$\int \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Setzen wir hier $a = 1$, dann wird:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Somit alles eingefügt giebt:

$$\int \text{arc}\sin x\,dx = x\,.\,\text{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}.$$

7) In gleicher Weise läßt sich erweisen:

$$\int \text{arc}\cos x\,dx = x\,.\,\text{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

8) $\int \text{arc}\,\text{tang}\,x\,dx = \text{arc}\,\text{tang}\,x - \frac{1}{2}\,l\,(1+x^2) + C.$

114. Reduktionsformeln.

Mit Hilfe der Methode der teilweisen Integration wollen wir nun noch eine Anzahl von Formeln entwickeln, die für die späteren Rechnungen von Vorteil sein werden.

Unsere sämtlichen Integralentwickelungen, die wir bisher ausführten, sind nicht nur willkürliche Aufgaben zur Uebung, sondern sie geben uns zugleich einen Formelschatz, der zu jeder etwas komplizierten Aufgabe herangezogen werden muß. Wir wollen ihn am Schluß dieses Kapitels übersichtlich in Tabellenform zusammenstellen.

115. Erste Reduktionsformel.

Es soll bewiesen werden:

I) $$\int\frac{x^{n+1}\,.\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^n}{n+1}\,.\,\sqrt{a^2-x^2}+\frac{n a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}\,.\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Ableitung. Wir setzen für:

1) $$\int\frac{x^{n+1}\,.\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int x^n\cdot\frac{x\,.\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Sei nun in diesem Ausdruck

$$u=x^n;\quad dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad\text{und}\quad v=-\sqrt{a^2-x^2},$$

dann ist:

2) $$\int x^n\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^n\,.\,\sqrt{a^2-x^2}+\int n x^{n-1}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Den letzten Ausdruck müssen wir noch umformen. Wir wollen zu dem Zwecke den Wert unter dem Integralzeichen und zwar Zähler und Nenner mit $\sqrt{a^2-x^2}$ multiplizieren. Dann ergiebt sich:

3) $$-n x^{n-1}\,.\,\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{n a^2 x^{n-1}\,.\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{n x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Fügen wir den neuen Wert wieder in 2) ein:

4) $$\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-x^n\,.\,\sqrt{a^2-x^2}+n a^2\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-n\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

und bringen das negative Integral auf die linke Seite. Also:

5)
$$\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+n\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=-x^n\sqrt{a^2-x^2}+na^2\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Daher:

6) $$(n+1)\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^n\sqrt{a^2-x^2}+na^2\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dividieren wir endlich durch $n+1$, so erhalten wir unsere Formel:

I) $$\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dieser allgemeine Ausdruck führt zu speziellen Formen. Setzen wir z. B. in ihn $n=1$, dann wird:

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Nun ist nach Formel 9) der Integraltafel und Aufgabe 8 in Abschnitt 105:

$$\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{2}\cdot\text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

Setzen wir wiederum zurück, dann erhalten wir Formel:

Ia) $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\,\text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

116. Die zweite Reduktionsformel.

In der gleichen Weise wie in Abschnitt 115 läßt sich die II. Reduktionsformel herleiten. Es ist:

II) $$\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Setzen wir auch hier $n=1$ und verwenden die Beziehung:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=l(x+\sqrt{a^2+x^2})+C,$$

dann erhalten wir Formel:

$$\text{II a)}\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\cdot l(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

117. Die dritte Reduktionsformel.

Es soll bewiesen werden:

$$\text{III)}\quad \int x^{n-1}\cdot dx\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{x^n}{n+1}\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Lösung. Wir wollen das Differential unter dem Integralzeichen auf der linken Seite der Gleichung mit dem Ausdruck $\sqrt{a^2-x^2}$ multiplizieren und dividieren, dann wird es:

$$1)\quad x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Wir können dann das Integral in zwei Teile zerlegen:

$$2)\quad \int x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2}=a^2\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Für $\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ setzen wir den Wert ein, den uns die Reduktionsformel I) liefert. Wir erhalten dann:

$$3)\quad \int x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=a^2\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{n a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2} + \left(a^2 - \frac{n a^2}{n+1}\right)\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2} + \left(\frac{a^2 n + a^2 - n a^2}{n+1}\right)\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Das ist aber, wie man sofort sieht, gleich Formel III):

$$\int x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Setzen wir auch in III) $n = 1$, dann ergiebt sich die vereinfachte Formel:

III a) $$\int dx\cdot\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\cdot \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

118. Die vierte Reduktionsformel.

Durch ähnliche Rechnungen wie in 117 läßt sich die vierte Reduktionsformel erweisen:

IV) $$\int x^{n-1}dx\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x^n}{n+1}\cdot\sqrt{a^2+x^2}\,\frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Setzen wir hier $n = 1$, so ergiebt sich:

IV a) $$\int dx\,.\,\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\cdot l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C.$$

119. Wert der abgeleiteten Formeln.

Die in den vorstehenden Abschnitten der Integralrechnung entwickelten Formeln sind nun hinreichend, um die wichtigsten Aufgaben der Integralrechnung lösen zu können. Wir werden daher im Weiteren immer wieder auf diese Formeln zurückweisen und der Leser wird sie stets bei der Lektüre von Schriften, in denen die Integralrechnung Verwendung findet, wiederfinden. — Zur größeren Bequemlichkeit stellen wir sie in einer „**Integral-Tafel**“ zusammen.

Integral-Tafel.

1) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$

2) $\int \frac{dx}{x} = l x + C$

3) $\int e^x\,dx = e^x + C$

4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{l.a} + C$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x + C$

11) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \sec x + C$

12) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc}\sec x + C$

13) $\int a\,f'(x)\,dx = a\int f'(x)\,dx + C$

14) $\int \{F'(x) + f'(x) - \varphi'(x)\}\,dx$
$= \int F'(x)\,dx + \int f'(x)\,dx - \int \varphi'(x)\,dx + C$

15) $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C$

16) $\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a) + C$

17) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} l(a+bx) + C$

18) $\int \frac{nx\,dx}{a+bx^2} = \frac{n}{2b} l(a+bx^2) + C$

19) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arc tang}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

20) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \{l(x-a) - l(x+a)\}$

$= \frac{1}{2a} l \cdot \left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

21) $\int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \,.\, \text{arc sin}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

23) $\int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \cdot l(a^2+x^2) + C$

24) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

25) $\int \frac{ax\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -a\sqrt{a^2-x^2} + C.$

26) $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C$

27) $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

28) $\int \text{tang}\, x\, dx = -l \cos x + C$

29) $\int \cot x \,.\, dx = l \,.\, \sin x + C$

30) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \,.\, \text{tang}\, x + C$

31) $\int \frac{dx}{\sin x} = -l \cot\left(\frac{x}{2}\right) + C$

$= l \,.\, \text{tang}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

32) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \begin{cases} -\,l\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \\ l\,\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \end{cases}$$

33) $$\int \frac{(mx+n)\,dx}{x^2 + 2ax + b} = \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta} \int \frac{dx}{x - \alpha} - \frac{m\beta + n}{\alpha - \beta} \int \frac{dx}{x - \beta}$$
$$= \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta} \cdot l(x - \alpha) - \frac{m\beta + n}{\alpha - \beta} \cdot l(x - \beta)$$

34) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

35) $$\int x \,.\, e^x\,dx = e^x(x - 1) + C$$

36) $$\int l\,.\,x\,dx = x(l\,x - 1) + C$$

37) $$\int x^2\,l\,x\,.\,dx = \frac{x^3}{3}\left(l\,x - \tfrac{1}{3}\right) + C$$

38) $$\int x\,.\,e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}\left(x - \frac{1}{m}\right) + C$$

39) $$\int x\,.\,\cos x\,dx = x\,.\,\sin x + \cos x + C$$

40) $$\int x^2 \cos x\,dx = \sin x\,(x^2 + 2x\,.\,\cot x - 2) + C$$

41) $$\int \cos^2 x\,.\,dx = \tfrac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C$$

42) $$\int \sin^2 x\,dx = -\tfrac{1}{2}(\sin x \cos x - x) + C$$

43) $$\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx = x + C$$

44) $$\int \mathrm{arc}\sin x\,dx = x\,.\,\mathrm{arc}\sin x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

45) $$\int \mathrm{arc}\cos x\,dx = x\,.\,\mathrm{arc}\cos x - \sqrt{1 - x^2} + C$$

46) $$\int \mathrm{arc\,tang}\,x\,dx = \mathrm{arc\,tang}\,x - \tfrac{1}{2}\,l(1 + x^2) + C$$

47) (I) $$\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{n a^2}{n+1} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

48) (Ia) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arc}\sin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

49) (II) $$\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

50) (IIa) $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\,l\,.\,(x+\sqrt{a^2-x^2})+C$$

51) (III) $$\int x^{n-1}\,dx\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

52) (IIIa) $$\int dx\,.\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\text{arc}\sin\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

53) (IV) $$\int x^{n-1}\,dx\sqrt{a^2+x^2}$$
$$=\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

54) (IVa) $$\int dx\,.\sqrt{a^2+x^2}$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot l(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

Achtzehntes Kapitel.

Die bestimmten Integrale.

120. Definitionen.

Man pflegt die Integrale, mit welchen wir uns bisher beschäftigt haben, unbestimmte Integrale zu nennen. So ist z. B.:

1) $$y = \int f'(x)\,dx + C$$

ein unbestimmtes Integral und die Konstante C ganz beliebig. — Soll nun die Konstante C bestimmt werden, so setzt man den Wert von x in die Funktion ein, für welchen das Integral Null wird. Diesen Wert nennt man die untere Grenze des Integrals. Wird z. B. unser Integral für den Wert $x = a$ zur Null, dann schreibt man:

2) $$\int_a f(x)'\,dx = f(x) + C$$

oder: $$0 = f(a) + C.$$

Daraus folgt, daß die Konstante:

3) $$C = -f(a) \quad \text{ist.}$$

Setzen wir diesen Wert in 2) ein, so ergiebt sich:

4) $$\int_a f'(x)\,dx = f(x) - f(a).$$

Nehmen wir hierfür ein Beispiel.

Es sei das Integral gegeben:

$$\int_3 x^3\,dx = ?$$

Es ist an sich:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

Ist nun x = 3, wenn der Integralwert zur Null werden soll, dann setzen wir an:

$$0 = \frac{3^4}{4} + C = \frac{81}{4} + C.$$

Nunmehr ist: $C = -\frac{81}{4}$.

Eingesetzt: $\int\limits_3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{81}{4} = 0$; für $x = 3$.

So ist man also stets im stande den Wert der Konstanten zu bestimmen.

Zuweilen wünscht man auch den Wert des Integrals für irgend einen gegebenen bestimmten Wert von x zu kennen. Man pflegt einen solchen Wert die obere Grenze des Integrals zu nennen.

In diesem Falle schreibt man:

$$5)\qquad \int^b f'(x)\,dx = f(b) + C.$$

In den meisten Fällen sind aber die beiden Grenzen, die untere und die obere, vereinigt, dann nennt man das Integral ein bestimmtes.

So ist:

$$6)\qquad \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

ein bestimmtes Integral.

Wir merken uns die folgenden Bezeichnungen:

a) Hat in einem unbestimmten Integral die Konstante einen beliebigen Wert, dann heißt das Integral ein allgemeines.

b) Hat die Konstante in einem unbestimmten Integral einen bestimmten Wert, so nennt man es ein partikuläres Integral.

c) Ist der Wert des unbestimmten Integrals für zwei gegebene Werte zu ermitteln, dann heißt es ein bestimmtes Integral.

Wir wollen nun mit Rücksicht auf Gleichung 6) bestimmte Integrale berechnen. Die Gleichung 6) giebt uns selbst hierzu die Regel an die Hand:

Um ein bestimmtes Integral zu berechnen, ermittelt man zunächst das allgemeine Integral. Setzt sodann die obere Grenze ein, dann die untere und subtrahiert den letzten Wert vom ersten.

Mögen das einige Beispiele zeigen:

1) $$\int_2^4 x^2\,dx = ?$$

Es ist $$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

das unbestimmte Integral. Bilden wir nun den Wert für die Grenzen:

$$\int_2^4 x^2\,dx = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}.$$

2) $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = ?$$

Also: $$\int \frac{dx}{x} = l\,x + C$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = l\,2 - l\,1.$$

Bekanntlich ist $l\,1 = 0$.

Daher: $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = l\,2.$$

3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = ?$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin 0 = 0.$$

Daher: $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1.$$

121. Allgemeine Sätze über bestimmte Integrale.

a) In bestimmten Integralen kann immer die obere und die untere Grenze mit einander vertauscht werden.

b) Werden die Grenzen in einem bestimmten Integral mit einander vertauscht, dann müssen auch die Vorzeichen verändert werden.

Die Sätze a) und b) lassen sich, wie man unmittelbar erkennt, durch die Formel ausdrücken:

7) $$\int_a^b f'(x) \, dx = -\int_b^a f'(x) \, dx.$$

Und hieraus folgt:

8) $$\int_a^b f'(x) \, dx + \int_b^a f'(x) \, dx = 0.$$

Mag das wiederum ein Beispiel erläutern. Es sei gegeben:

$$\int_2^4 x^2 \, dx.$$

$$\int_2^4 x^2\,dx = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{5}$$

$$\int_4^2 x^2\,dx = \frac{2^3}{2} - \frac{4^3}{3} = -\frac{56}{3}.$$

Also: $$\int_2^4 x^2\,dx + \int_4^2 x^2\,dx = \frac{56}{3} - \frac{56}{3} = 0.$$

Ein jedes bestimmte Integral kann in mehrere bestimmte Integrale zerlegt werden, indem man zwischen die Grenzen a und b neue Grenzen einführt. In Formel:

9) $$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^c f'(x)\,dx + \int_c^b f'(x)\,dx.$$

Für einen bestimmten Fall:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \int_1^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx.$$

Führen wir die Rechnung aus:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^3 x^2\,dx = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\int_1^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx = \frac{7}{3} + \frac{19}{3} = \frac{26}{3}.$$

Direkt:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

d) Es leuchtet ein, daß jedes so gewonnene bestimmte Integral wiederum zerlegt werden

kann; und so fort in beliebiger Wiederholung. In Formel:

$$10)\qquad \int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^c f'(x)\,dx + \int_c^d f'(x)\,dx + \int_d^e f'(x)\,dx \cdots + \int_u^b f'(x)\,dx.$$

Neunzehntes Kapitel.

Die Quadratur der Kurven.

122. Erklärungen.

Es sei eine krumme Linie (siehe Fig. 20) PQ, durch die Funktion:

$$1)\qquad y = f(x).$$

gegeben. Wir wollen die Fläche bestimmen, die von dem Kurvenstück PQ, den beiden Ordinaten PM und QN und

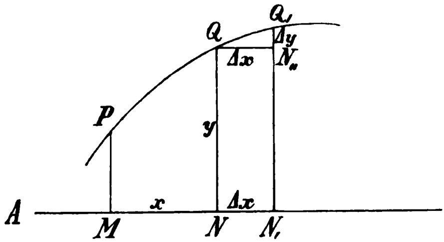


Fig. 20.

der Abscissenachse begrenzt wird. — Die Koordinaten des Punktes Q seien x und y bezogen auf den Anfangspunkt A. — Wie man sofort einsieht, wächst das Flächenstück, wenn

die Abscissenachse zunimmt. Es ist also die Fläche (F) *eine Funktion der Abscisse*. Ganz allgemein:

2) $$F = \varphi(x).$$

Wächst x um $\triangle x$ in Gleichung 1), so nimmt auch y um $\triangle y$ und die Fläche F um das Flächenelement $\triangle F$ zu. Betrachten wir nun unsere Figur (Fig. 20). In derselben ist:

$$N N' = \triangle x$$

$$N, Q, = y + \triangle y$$

und: $$N N, Q, Q = \triangle F.$$

$\triangle F$ (N N, Q, Q) ist größer als das Rechteck Q N,, N, N, das wir gleich $y \cdot \triangle x$ setzen können, und kleiner als das Rechteck $\triangle x (y + \triangle y)$. Also:

3) $$\triangle x (y + \triangle y) > \triangle F > y \cdot \triangle x.$$

Lösen wir die Ungleichung 3) in die Elemente auf, so ergiebt sich:

$$\triangle x (y + \triangle y) > \triangle F$$

und: $$y \triangle x < \triangle F$$ und hieraus:

4) $$\frac{\triangle F}{\triangle x} < y + \triangle y$$

sowie: $$\frac{\triangle F}{\triangle x} > y.$$

Werden nun die Differenzen $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle F$ unendlich klein, gehen sie also in die Differentiale über, *dann gehen die Ungleichungen in eine Gleichung über*. Es ist, wie leicht zu erkennen, $dy = 0$, wenn es allein steht.

5) $$\frac{dF(x)}{dx} = y.$$

Und hieraus:

6) $$d \cdot F(x) = y\,dx.$$

Diesen Ausdruck nennt man das *Differential der Fläche*.

Integrieren wir die Gleichung 6), so erhalten wir die Fläche selbst:

7) $$F = \int y\,dx.$$

Die Quadratur einer Kurve wird durch das vorstehende Integral erhalten.

Wir wollen nun die Quadratur bekannter Kurven durchführen.

123. Quadratur der Parabel.

Wir kennen aus der analytischen Geometrie die Formel für die Parabel. Sie lautet:

8) $$y = \sqrt{2px}.$$

Setzen wir den Wert in die Gleichung 7) ein, dann haben wir den Wert ihrer Quadratur.

9) $$F = \int \sqrt{2px}\,.\,dx.$$

Wir wollen das Integral bestimmen und setzen daher zunächst die Konstante vor das Integralzeichen:

$$F = \sqrt{2p}\int x^{1/2}\,dx.$$

Wie bekannt ist:

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{1/2+1}}{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\,x^{3/2} + C.$$

Also: $$F = \tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{2p}\cdot x^{3/2} + C,$$

$$x^{3/2} = x\,.\,x^{1/2} = x\cdot\sqrt{x}.$$

Somit: $$F = \tfrac{2}{3}\,x\cdot\sqrt{2px}.$$

Mit Verwendung von 8) folgt dann

10) $$F = \tfrac{2}{3}\,xy + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten wollen wir noch Folgendes überlegen. Beginnt die Parabel in ihrem Scheitelpunkte, dann ist für $x = 0$ auch die Fläche der Parabel, also

$F = 0$. Somit auch $C = 0$. Die Gleichung 10) geht dann über in:

11) $$F = \frac{2}{3} x y.$$

124. Quadratur der Ellipse.

Wie bekannt ist die Gleichung der Ellipse:

12) $$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

in der a und b die beiden Halbachsen darstellen (siehe

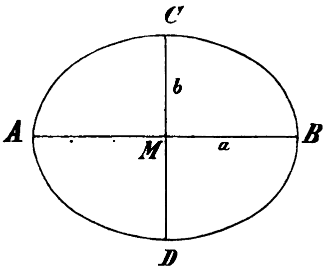


Fig. 21.

Fig. 21). Somit lautet das Differential ihrer Fläche:

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

und die Fläche selbst:

13) $$F = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + C.$$

Das Integral ist uns bereits bekannt, wir finden es in unserer „Integral-Tafel" unter Nr. 52. Somit ergiebt sich:

14) $$F = \frac{b}{a} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right\} + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten bedenken wir wiederum, daß für $x = 0$ auch $F = 0$ und daher auch $C = 0$ werden muß.

Wir wollen nun durch unsere Formel 14) vorerst einen Quadranten der Ellipse berechnen. — In dem Falle ist $x = a$. Setzen wir den Ausdruck in die Formel 14) ein. Das ergiebt:

15) $$\frac{F}{4} = \frac{b}{a} \cdot \left\{0 + \frac{a^2}{2} \text{arc sin} \left(\frac{a}{a}\right)\right\}$$
$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \text{ arc sin } 1$$
$$= \frac{a\,b}{2} \cdot \text{arc sin } 1.$$

Wie wir wissen, ist $\text{arc sin } 1 = \frac{\pi}{2}$. Daher:

$$\frac{F}{4} = \frac{a\,b\,.\,\pi}{4}.$$

Die Fläche der ganzen Ellipse wird nunmehr:

16) $$F = a\,b\,\pi.$$

125. Quadratur der Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel ist:

17) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Es ergiebt sich sofort das Differential ihrer Fläche:

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx$$

und das Flächenintegral:

18) $$F = \frac{b}{a}\int\sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx.$$

Auch dieses Integral ist bekannt und findet sich in der Integral-Tafel.

126. Quadratur der Cykloide.

Konstruktion und Gleichung der Cykloide:

Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie dahinrollt, dann beschreibt ein jeder Punkt der Peri-

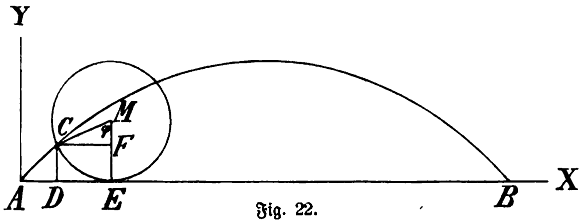


Fig. 22.

pherie eine gesetzmäßige Linie. Man nennt sie die Radlinie oder die Cykloide. Siehe Figur 22.

Wir wollen zunächst die Gleichung der Cykloide herleiten.

Der Punkt C der Cykloide habe die Koordinaten:

$$x = AD \quad \text{und} \quad y = CD.$$

Der Radius des Kreises CM sei gleich r und der Winkel, den er mit dem Lot ME bildet, φ; das Bogenstück CE des Kreises, das der Länge AE entspricht, wird durch das Produkt $r \cdot \varphi$ gemessen. Man kann also setzen:

$$CE = AE = r \cdot \varphi$$

und $$CF = DE = r \cdot \sin\varphi,$$

denn CF ist DE parallel. Weiter ist:

$$x = AD = AE - DE$$
$$= r \cdot \varphi - r \cdot \sin\varphi.$$

Daher: $$x = r(\varphi - \sin\varphi).$$

In ähnlicher Weise giebt die Figur den Wert für y. Denn:

$$y = ME - MF$$
$$= r - r \cdot \cos\varphi.$$
$$y = r(1 - \cos\varphi).$$

Nachdem wir so die Gleichungen für die Cykloide:

19) $$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$

und: $$y = r(1 - \cos\varphi)$$

gefunden haben, gehen wir zur **Quadratur** über.

Das Flächenstück ist in unserer Aufgabe zu bestimmen, das von der Kurve und von der Linie AB begrenzt wird. Um, der Formel $F = \int y\,dx$ gemäß, das auszuführen, bilden wir dx.

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi.$$

Also: $$F = \int r^2 (1 - \cos\varphi)(1 - \cos\varphi)\,d\varphi + C.$$

20) $$= r^2 \int (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi$$
$$= r^2 \int (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi.$$

Um den Ausdruck für die Integration geschickter zu machen, bedienen wir uns der Beziehung:

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1.$$

Daraus: $$\cos^2\varphi = \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}$$ und setzen ein:

21) $$F = r^2 \int (1 - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2})\,d\varphi$$
$$= r^2 \int (\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)\,d\varphi$$
$$= r^2 \left\{ \tfrac{3}{2} \int d\varphi - 2\int \cos\varphi\,d\varphi + \tfrac{1}{2}\int \cos 2\varphi\,d\varphi \right\}$$
$$= r^2 \left\{ \tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi \right\} + C.$$

Die Cykloidenfläche beginnt im Anfangspunkt (A) des Koordinatensystems, daher ist für $x = 0$ auch $F = 0$ und auch $C = 0$. Für die ganze Fläche hat sich der Kreis

einmal aufgerollt und es ist $\varphi = 2\pi$ geworden. Setzen wir diesen Wert von φ ein, so ist:

22) $$F = r^2 \left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi - 2 \sin 2\pi + \tfrac{1}{4} \sin 4\pi\right)$$
$$= r^2 (3\pi - 0 + 0)$$
$$= 3 r^2 \pi.$$

Wir erhalten das Resultat, daß die Cykloidenfläche dreimal so groß ist als der Inhalt des erzeugenden Kreises.

127. Quadratur der gleichseitigen Hyperbel.

In der Geometrie wird gezeigt, daß die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel mit einander rechte Winkel

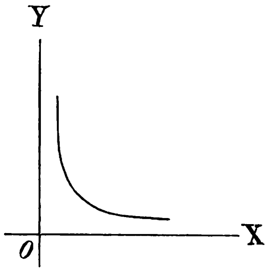


Fig. 23.

bilden. (Siehe Fig. 23.) Bei der Ableitung der Gleichung dieser Hyperbel nimmt man die Asymptoten als Koordinaten. Ihre Gleichung lautet:

23) $$xy = 1; \quad \text{also} \quad y = \frac{1}{x}.$$

Somit erhalten wir für die Fläche den Ausdruck:

24) $$F = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$= lx + C.$$

128. Quadratur der Kreislinie.

Es soll das Flächenstück mittels unserer Methode ermittelt werden, das von der halben Peripherie und dem Durch-

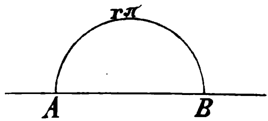


Fig. 24.

messer begrenzt wird. (Siehe Fig. 24.) Der Halbkreis wird dargestellt durch die Gleichung:

25) $$y = r\pi.$$

Daher erhalten wir:

26) $$F = \int r \, . \, \pi \, dr + C$$
$$= \frac{r^2 \pi}{2}.$$

Somit der Inhalt des ganzen Kreises $r^2 \pi$.

129. Quadratur solcher Kurven, die durch Polarkoordinaten ausgedrückt sind.

Auf unserer krummen Linie (siehe Fig. 25) hat der Punkt P als Bestimmungsstücke r und α. Der Punkt P_1,

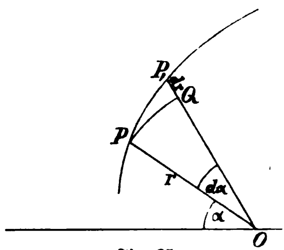


Fig. 25.

$r + dr$ und $\alpha + d\alpha$. — Da die Strecke PP_1 sehr klein gedacht werden muß, so kann man sich den Sektor POP_1

geradlinig denken. Dann stellt sich der Inhalt dieser Fläche durch eine bekannte trigonometrische Formel dar:

27) $$dF = \tfrac{1}{2} r(r + dr)\sin(d\alpha)$$
$$= \tfrac{1}{2} r(r + dr)\frac{\sin(d\alpha) \, . \, d\alpha}{d\alpha}.$$

Indem sich das Flächenelement der Null nähert, wird, wie bekannt:
$$\lim (r + dr) = r \quad \text{und}$$
$$\lim \frac{\sin(d\alpha)}{d\alpha} = 1.$$

Es geht also 27) über in:

28) $$dF = \tfrac{1}{2} r^2 d\alpha.$$

Integrieren wir, so empfangen wir das Flächenstück:

29) $$F = \frac{1}{2}\int r^2 d\alpha.$$

130. Quadratur der Archimedischen Spirale.

Die Archimedische Spirale giebt ein gutes Beispiel für die Ausführung einer Quadratur, wo Polarkoordinaten zu Grunde liegen. Wir haben uns mit dieser Kurve schon im Abschnitt 74 Seite 108 beschäftigt. (Siehe Fig. 13.) Die Gleichung der Archimedischen Spirale lautet:

30) $$r = a \, . \, \alpha.$$

Führen wir diesen Wert in die allgemeine Formel 29) ein, dann erhalten wir:

31) $$F = \frac{1}{2}\int a^2 \, . \, \alpha^2 d\alpha + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\int \alpha^2 d\alpha + C$$
$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\alpha^3}{3} + C = \frac{a^2}{6} \cdot \alpha^3 + C.$$

Beginnt die Spirale für $\alpha = 0$, dann ist auch $F = 0$ und daher auch $C = 0$.

Zwanzigstes Kapitel.

Die Rektifikation der Kurven.

131. Erklärung und Ableitung der Formeln.

Die Rektifikation der Kurven lehrt, aus dem Differential einer krummen Linie, mittels der Integration, ein beliebig langes Stück der Linie zu bestimmen.

Betrachten wir das Stück AP einer Kurve, die durch die Gleichung:

1) $$y = f(x)$$

ausgedrückt wird. (Siehe Fig. 26.) Bezeichnen wir das Bogenstück AP mit s. Es ist nun klar, daß mit der Ver-

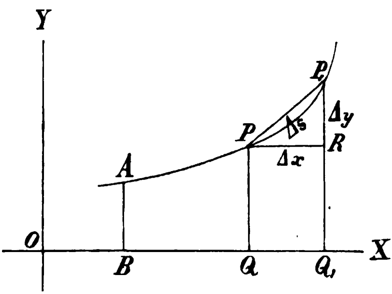


Fig. 26.

änderung von s sich auch die Abscisse ändert, daß somit s eine Funktion von x ist. — Nehmen wir nun an, daß sich das Bogenstück AP = s um PP, = $\triangle$ s vergrößere. Dann wächst auch x um $\triangle$ x und y um $\triangle$ y, wie aus der Figur klar hervortritt. Nehmen wir das Bogenstück PP, sehr klein an, dann fällt es mit der Sehne zusammen und wir erhalten die Beziehung:

2) $$\triangle s^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2$$ und

$$\triangle s = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}.$$

Nähert sich endlich die Größe $\triangle s$ der Null, geht sie also in ds über, dann geht auch $\triangle x$ und $\triangle y$ in dx, resp. in dy über, und 2) wird zu:

3) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die Gleichung 3) giebt den **Wert** für das **Bogenelement** der **Kurve** an. Wollen wir die Kurve selbst oder ein Stück derselben erhalten, dann müssen wir 3) integrieren. Somit:

4) $$s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Manchmal ist es vorteilhaft, y zur Veränderlichen zu machen, dann erhält man in der gleichen Weise:

4a) $$s = \int_{y_0}^{y} dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Ein **bestimmtes Integral** ist hier notwendig, weil die Länge der Kurve in der Aufgabe zu bestimmen ist.

132. Die Rektifikation der Parabel.

Die Gleichung der Parabel lautet:

$$y^2 = 2px.$$

Bilden wir die Ausdrücke, die in den Formeln 4) oder 4a) zur Rektifikation sich vorfinden. Die Differentiierung ergiebt:

$$2y\,dy = 2p\,dx$$

$$y\,dy = p\,dx$$

und
$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}.$$

In diesem Falle ist es vorteilhaft 4a) zu verwenden. Daher:

$$s = \int dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$= \int dy\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{p}\int dy\sqrt{p^2+y^2}.$$

Nun kann man schreiben: $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

$$dx^2 = \frac{y^2}{p^2}dy^2.$$

Also:
$$ds^2 = \frac{dy^2 \cdot p^2}{p^2} + dy^2 = \frac{dy^2y^2 + dy^2p^2}{p^2}$$

$$= \frac{dy^2}{p^2}(y^2+p^2).$$

Daher:
$$ds = \frac{dy}{p}\sqrt{y^2+p^2}.$$

Also:
$$s = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{y^2+p^2} + C.$$

Mit Hilfe der Formel 54 der Integral-Tafel giebt das:

$$s = \tfrac{1}{p}\int dy\sqrt{p^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{2p}\left\{y\sqrt{p^2+y^2} + p^2 \cdot l\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)\right\} + C.$$

Es ist klar, daß der Parallelbogen der Null gleich wird, wenn y zur Null wird. Setzen wir in die Formel für s, daher $s = 0$ und $y = 0$, so wird:

$$0 = \frac{1}{2p}\{p^2 \cdot l(\sqrt{p^2})\} + C$$

$$0 = \frac{1}{2p}p^2 \cdot lp + C$$

$$0 = \frac{p}{2} \cdot lp + C.$$

Somit: $$C = -\frac{p}{2} \cdot lp.$$

Setzen wir diesen Wert von C in die obige Gleichung für s ein, dann geht sie über in:

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} \cdot l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right) - \frac{p}{2} \cdot lp$$
$$= \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} l \left\{\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right\}.$$

133. Die Rektifikation der Cykloide.

Im Abschnitt 126 fanden wir als Formeln für die Cykloide:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = r(1 - \cos\varphi).$$

(Siehe Fig. 22 Seite 188.)

Um diese Kurven zu rektifizieren bilden wir die Differentiale; also:

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$

und $$dy = r \cdot \sin\varphi\, d\varphi.$$

Da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist, erhalten wir:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2 (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi^2$$
$$= r^2 (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi^2$$
$$= \{r^2 - 2 r^2 \cos\varphi + r^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\}\, d\varphi^2.$$

Da nun $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist, wird wiederum:

$$ds^2 = (2 r^2 - 2 r^2 \cos\varphi)\, d\varphi^2$$
$$= 2 r^2 (1 - \cos\varphi)\, d\varphi^2.$$

Wir setzen nach den Lehren der Trigonometrie:

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Dann ergiebt sich:

$$ds^2 = 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^2$$

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Also kommen wir leicht zum Integral:

$$s = 2r\int\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi + C = 4r\int\sin\frac{\varphi}{2}\cdot d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= -4r\cos\frac{\varphi}{2} + C.$$

Die Cykloide beginnt mit $\varphi = 0$; in diesem Falle ist somit auch $s = 0$. Setzen wir ein:

$$0 = -4r\cos 0 + C$$

$$= -4r + C.$$

Daher: $C = 4r.$

Es wird daher die Cykloidenkurve:

$$s = -4r\cos\frac{\varphi}{2} + 4r$$

$$= 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Zur besseren Ausnutzung dieser Formel ist noch eine kleine Umformung vorteilhaft. Setzen wir:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{4}$$

oder: $1 - \cos\frac{\varphi}{2} = 2\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{4}$ in die Formel.

Also: $s = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8r\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{4}.$

Da sich die Cykloide von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ entwickelt, so müssen wir ihr Bogenstück aus der Form eines bestimmten Integrals erhalten und zwar:

$$s = 2r\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi + C.$$

Nach den Auseinandersetzungen im Kapitel über bestimmte Integrale haben wir dann das allgemeine Integral zu suchen und die Werte der Grenzen in dieses einzusetzen.

Der Wert des allgemeinen Integrals ist:

$$s = 8r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{4}.$$

Setzen wir $\varphi = 2\pi$, dann geht es über in

$$s = 8r \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{4} = 8r \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} = 8r.$$

Setzen wir $\varphi = 0$, dann wird auch der allgemeine Ausdruck Null.

Es ist daher die Cykloide 8mal so groß, als der Radius des erzeugenden Kreises.

134. Die Rektifikation von Kurven in Polarkoordinaten.

Es sei die Gleichung einer krummen Linie in Polarkoordinaten gegeben:

$$5) \qquad r = f(\alpha).$$

Nennen wir ein Stück der Kurve s (siehe Fig. 27). Wenn der Winkel α wächst, nimmt auch die Kurve zu, somit ist auch s eine Funktion von α. Nehmen die Kurven um das kleine Stück $PP' = ds$ zu, dann wächst α um $d\alpha$. Schlagen wir mit $r = OP$ einen Kreis um O; er trifft die Linie $OP,$ in Q. Wir können nun, der sehr kleinen Seiten halber, wie

in Abschnitt 129, das Dreieck PQP, als ein gradliniges betrachten, das bei Q einen rechten Winkel enthält. Dann ist:

6) $$\overline{PP_{,}}^2 = \overline{P_{,}Q}^2 + \overline{PQ}^2.$$

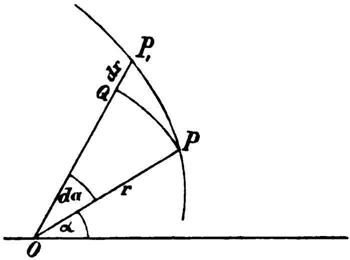


Fig. 27.

Da nun $P_{,}Q = dr$, $PP_{,} = ds$ und $PQ = r\,d\alpha$ ist, folgt aus 6)

7) $$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\alpha^2$$
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\alpha^2}$$
$$= d\alpha\sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}.$$

Nehmen wir jetzt das Integral, dann ergiebt sich:

8) $$s = \int d\alpha\sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2} + C.$$

Da die Länge des Kurvenstücks von α bestimmt wird, so können wir endlich auch schreiben:

8a) $$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha\sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}.$$

Der Leser mag zur Uebung die Archimedische Spirale rektifizieren.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Die Inhaltsbestimmung der Rotationsflächen.

135. Definition, Herleitung der Formeln.

Wenn sich eine Linie um eine feste Achse bewegt, so daß sie stets von dieser in gleicher Entfernung bleibt, dann beschreibt die Linie eine Fläche. Die Bestimmung einer solchen Rotationsfläche nennt man die Komplanation der Flächen.

Wir wollen die Formeln zu ihrer Berechnung herleiten. (Siehe hierzu Fig. 28.)

Die Rotationsachse bezeichnen wir mit AX, sie sei zugleich die X-Achse des Koordinatensystems, und ihr Anfangspunkt liege in A. Die Kurve, die um die Achse rotiert,

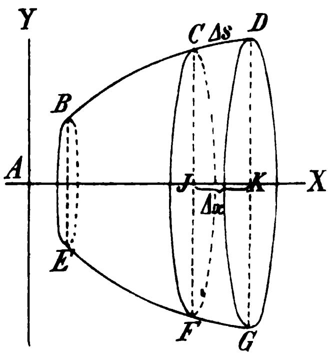


Fig. 28.

sei BC. Es ist nun sofort klar, daß, wenn die Abscisse (X-Achse) wächst, die Oberfläche F, die wir uns vollendet denken können, auch zunimmt, daß also die Rotationsfläche eine Funktion der Abscisse ist. Daher:

1) $$F = f(x).$$

Nimmt x um $\triangle x$ zu, dann wächst auch F um $\triangle F$. Wie man aus der Figur leicht sieht, kann man das Element der Rotationsfläche $\triangle F$ als den Mantel eines Kegelstumpfes betrachten, der durch Rotation der Sehne $\triangle s = CD$ um die Achse entstanden ist. Die Stereometrie lehrt den Mantel eines Kegelstumpfes berechnen. Mit ihrer Hilfe erhalten wir daher:

2) $$M = \pi (JC + KD) CD.$$

Bezeichnen wir die Ordinaten der Punkte C resp. D mit y, beziehungsweise mit y' und CD mit $\triangle s$, als kleinen Zuwachs der Kurve $BC = s$, dann geht 2) über in:

3) $$M = \pi (y + y') \triangle s.$$

Rückt nun C sehr nahe an D heran, wird also $\triangle s$ zu ds, dann wird auch $y = y'$ und der Mantel M entspricht dem Elemente der Rotationsfläche dF. Wir können daher schreiben:

4) $$dF = 2 \pi y \, ds.$$

Nehmen wir das Integral, dann erhalten wir natürlich die Rotationsfläche selbst.

5) $$F = 2 \pi \int y \, ds + C.$$

Rotiert die Kurve um die y-Achse des Koordinatensystems, dann verändert sich die Formel, wie sofort einzusehen ist, in:

5a) $$F = 2 \pi \int x \, . \, ds + C.$$

136. Bestimmung der Oberfläche einer Kugel.

Dreht sich ein Kreis um seinen Durchmesser, so entsteht eine Kugeloberfläche. Wir wollen sie nach den im vorstehenden Abschnitt entwickelten Formeln bestimmen. — Die Gleichung des Kreises ist:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Somit: $$y^2 = r^2 - x^2.$$

Differentiieren wir, dann folgt:

$$2y\,dy = -2x\,dx.$$

Also:

$$dy = -\frac{x\,dx}{y}.$$

Um unseren Formelausdruck zu erhalten, bedienen wir uns der Bezeichnung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Eingesetzt ergiebt das:

$$ds^2 = dx^2 + \frac{x^2}{y^2}dx^2$$

$$= dx^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$= dx^2\left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right).$$

Ziehen wir die Wurzel und gedenken wir der Beziehung $r^2 = x^2 + y^2$, dann erhalten wir:

$$ds = \frac{dx\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{r\,dx}{y}.$$

Fügen wir unser Resultat in Formel 5) ein, so wird:

$$F = 2\pi\int\frac{y\,r\,dx}{y} + C$$

$$= 2\pi r\int dx + C.$$

Für eine bestimmte Aufgabe werden wir auch ein bestimmtes Integral einführen müssen.

Soll z. B. im vorliegenden Fall die ganze Kugelfläche berechnet werden, dann muß das Integral von $x = -r$ bis $x = +r$ ausgedehnt werden. Also:

$$F = 2\pi r\int_{-r}^{+r} dx = 2\pi r(r + r)$$

$$= 4\pi r^2.$$

Wie dem Leser aus der analytischen Geometrie bekannt ist, wird bei der gebrauchten Kreisgleichung der Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreises gelegt.

137. Bestimmung der Oberfläche des Rotationsparaboloides.

Rotiert eine Parabel um ihre Achse, dann entsteht ein Rotationsparaboloid. Wir gehen zu seiner Ableitung von der Gleichung der Parabel aus:

$$y^2 = 2px.$$

Differentiieren wir und dividieren durch 2:

$$y\,dy = p\,dx.$$

Wir erhalten also für den ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Bedenken wir wiederum, daß $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist.

Dann wird:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{p^2}{y^2}$$

$$= \frac{y^2 + p^2}{y^2}.$$

Setzen wir wiederum den Wert für $y^2 = 2px$ ein.

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{p^2 + 2px}{y^2}$$

und:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{p^2 + 2px}.$$

Und hieraus:

$$y\,ds = dx\sqrt{p^2 + 2px}.$$

Um das Integral leichter zu finden, machen wir mit der rechten Seite des vorstehenden Ausdrucks eine kleine Umformung.

Setzen wir: $u = \sqrt{p^2 + 2px}.$

Daher: $u^2 = p^2 + 2px.$

Differentiiert ergiebt das:

$$2udu = 2pdx$$

$$udu = pdx$$

und: $$dx = \frac{udu}{p}.$$

Nunmehr wird:

$$yds = \frac{udu}{p} \cdot u = \frac{u^2du}{p}.$$

Daher:

$$F = 2\pi \int yds = \frac{2\pi}{p} \int u^2 du$$

$$= \frac{2\pi u^3}{3p} + C.$$

Setzen wir wiederum den Wert von u ein:

$$F = \frac{2\pi}{3p} \left\{ \sqrt{p^2 + 2px} \right\}^3 + C$$

$$2px = y^2,$$

somit: $$F = \frac{2\pi}{3p} \left\{ \sqrt{p^2 + y^2} \right\}^3 + C.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C bedenken wir, daß für $y = 0$ auch $F = 0$ sein muß.

Wir setzen daher:

$$0 = \frac{2\pi}{3p} \cdot p^3 + C = \frac{2\pi p^2}{3} + C.$$

Also: $$C = -\frac{2}{3} p^2 \pi.$$

Somit erhalten wir endlich als Oberfläche des Paraboloides mit der üblichen Umformung:

$$F = \frac{2\pi}{3p} \left\{ (p^2 + y^2) \sqrt{p^2 + y^2} - p^3 \right\}.$$

138. Die Oberfläche soll ermittelt werden, die entsteht, wenn sich eine Cykloide um ihre x-Achse dreht.

Siehe Figur 22 Seite 188. Die Gleichungen, die die Cykloide bestimmen, lauten, wie wir zeigten:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = r(1 - \cos\varphi).$$

Formen wir sie in solcher Weise um, wie es unsere Formeln verlangen. Durch Differentiierung ergiebt sich:

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = r\,d\varphi - r\cos\varphi\,d\varphi$$
$$dy = r\,.\sin\varphi\,d\varphi.$$

Um den Ausdruck $ds^2 = dx^2 + dy^2$ zu bilden, müssen wir quadrieren:

$$dx^2 = r^2 d\varphi^2 - 2r^2\cos\varphi\,d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\,d\varphi^2$$
$$dy^2 = r^2\sin\varphi^2\,d\varphi^2.$$

Durch Addition folgt nunmehr:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$= r^2 d\varphi^2 + r^2 d\varphi^2(\sin^2\varphi + \cos\varphi) - 2r^2\cos\varphi\,d\varphi^2$$

Da: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$ wird:

$$ds^2 = 2r^2 d\varphi^2 - 2r^2\cos\varphi\,d\varphi^2$$
$$= 2r^2 d\varphi^2(1 - \cos\varphi).$$

Zur weiteren Umformung setzen wir:

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,.$$

Also: $$ds^2 = 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^2$$

und: $$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Setzen wir den Ausdruck jetzt in die Formel 5) Seite 201 ein, dann ist:

$$F = 2\pi\int r(1 - \cos\varphi)\,.\,2r\,.\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Dieser Ausdruck muß nun zur Integration geschickt gemacht werden. Wir erhalten nacheinander:

$$F = 2\pi\int 2r^2(1 - \cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 4r^2\pi\int(1 - \cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 4r^2\pi\int 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 4r^2\pi\int 2\sin^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 8r^2\pi\int\sin^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi + C$$

$$= 16r^2\pi\int\sin^3\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) + C.$$

Um die ganze Oberfläche zu erhalten, muß φ von Null bis 2π wachsen. Wir erhalten also ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen 2π und Null. — Daher:

$$F = 16r^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{2}\cdot d\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot$$

Bedient man sich der Beziehung $\sin^3\alpha = -\frac{1}{4}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin\alpha$ und zieht entsprechend zusammen, dann wird:

$$F = \frac{64}{3}r^2\pi.$$

139. Die Oberfläche des Rotationsellipsoides.

Rotiert eine Ellipse um ihre große Achse, dann beschreibt sie ein Rotationsellipsoid. Wir wollen diese Fläche ermitteln.

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

In ihr bedeutet $2a = AB$ die große Achse, $CD = 2b$ die kleine Achse (siehe Fig. 29). Ferner bezeichnet man die

Entfernung eines Brennpunktes F vom Mittelpunkt der Ellipse mit e und nennt diese Größe die Excentricität. In der analytischen Geometrie wird gezeigt, daß immer:

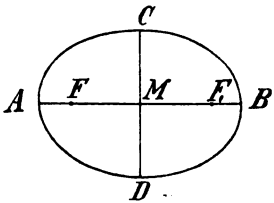


Fig. 29.

$e^2 = a^2 - b^2$ ist. — Um mit Hilfe unserer Formel 5) Seite 201 die Fläche des Rotationsellipsoides zu finden, müssen wir den Ausdruck $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ bilden. Hierzu ist es nötig, die Gleichung der Ellipse zu differentiieren. Das ergiebt:

$$dy = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x \,.\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wir müssen nun folgende Umbildungen ausführen:

$$ds^2 = dx^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2 dx^2}{(a^2 - x^2)}$$

$$= dx^2 \left\{ 1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\}$$

$$= dx^2 \left\{ \frac{a^4 - a^2 x^2 + b x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\}$$

$$= dx^2 \left\{ \frac{a^4 - x^2 (a^2 - b^2)}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\}.$$

Da wir $e^2 = a^2 - b^2$ setzen können, so folgt weiter:

$$ds^2 = dx^2 \left\{ \frac{a^4 - x^2 e^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\}.$$

Dividieren wir durch dx^2, so folgt:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 - x^2 e^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

und somit:
$$ds = \sqrt{\frac{a^4 - x^2 e^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Es ist nunmehr der Formelausdruck zu bilden:

$$y\,ds = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{a^4 - x^2 e^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$
$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - x^2 e^2}\, dx.$$

Das Integral der Rotationsfläche der Ellipse ist somit:

$$F = \frac{2\pi b}{a^2}\int\sqrt{a^4 - x^2 e^2}\, dx.$$

Wir wollen das vorstehende Integral berechnen und es zu dem Zwecke umformen:

$$F = \frac{2\pi b \,.\, e}{a^2}\int\sqrt{\frac{a^4}{e^2} - x^2}\, dx.$$

Setzen wir $\frac{a^4}{e^2} = n^2$, dann ist:

$$F = \frac{2\pi b \,.\, e}{a^2}\int\sqrt{n^2 - x^2}\, dx.$$

Mit Hilfe der Formel 52) der „Integral-Tafel“ können wir integrieren:

$$F = \frac{2\pi b \,.\, e}{a^2}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{n^2 - x^2} + \frac{n^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{n}\right)\right\} + C$$
$$= \frac{\pi b e}{a^2}\left\{x\sqrt{n^2 - x^2} + n^2 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)\right\} + C.$$

Setzen wir nun wiederum für $n^2 = \frac{a^4}{e^2}$ und für $e^2 = a^2 - b^2$, also die ursprünglichen Werte, dann wird:

$$F = \frac{\pi b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}\left\{x\sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a^4}{a^2 - b^2}\arcsin\frac{x \,.\, \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}\right\} + C.$$

Lösen wir die Klammer:

$$F = \frac{\pi b x}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2} + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{x \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} + C.$$

Die Bestimmung der Konstanten ist sofort erledigt, denn für $F = 0$ muß auch $C = 0$ werden. Setzen wir $x = a$, also gleich der halben großen Achse der Ellipse, dann erhalten wir die Fläche des halben Rotationsellipsoides $\frac{F}{2}$. Somit:

$$\frac{F}{2} = \frac{\pi b a}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) a^2} + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arcsin \frac{a \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$$

$$= \frac{\pi b}{a} \sqrt{a^2 b^2} + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$= b^2 \pi + \frac{a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Dann wird die g a n z e Fläche:

$$F = 2 b^2 \pi + \frac{2 a^2 b \pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

oder auch: $$= 2 b^2 \pi + \frac{2 a^2 b \pi}{e} \cdot \arcsin \left(\frac{e}{a}\right).$$

Bekanntlich geht eine Ellipse in einen Kreis über, wenn $a = b$ wird. Nehmen wir das im vorliegenden Falle an, dann wird das Rotationsellipsoid sich in eine **Kugel** verwandeln. Der Ausdruck $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ erhält hier den Wert Null.

Aber auch das zweite Glied verlangt eine genauere Betrachtung. Ist nämlich $a = b$, dann wird der Ausdruck:

$$\frac{\arcsin \left(\frac{e}{a}\right)}{e} = \frac{\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{0}{0},$$

also u n b e s t i m m t.

Mit Hilfe der Methoden über die Ausmittelung unbestimmter Ausdrücke in der Differentialrechnung ergiebt sich:

$$\frac{\arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{1}{a}.$$

Setzen wir diesen Wert in den zweiten Ausdruck ein und bedenken wir, daß man $a = b$ setzen soll, dann geht:

$$\frac{2a^2b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

über in $2b^2\pi$.

Also: $F = (\text{Kugeloberfläche}) = 2b^2\pi + 2b^2\pi$

$= 4b^2\pi = 4a^2\pi.$

Wie wir aus der Stereometrie wissen, ist das die Formel für die Kugeloberfläche.

140. Die Oberfläche für das Sphäroid.

Dreht sich eine Ellipse um ihre kleine Achse, dann entsteht ein **Sphäroid**. Diese Fläche ist bedeutungsvoll in vielen Aufgaben der mathematischen Physik und der Astronomie. Die Erde hat die Gestalt eines Sphäroids. Plastische Körper nehmen auf der Zentrifugalmaschine Sphäroidform an u. s. w. — Um die Aufgabe, die Oberfläche eines Sphäroids aus der Ellipse zu lösen, müssen wir die Gleichung der Ellipse nach x auflösen. Also:

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

Führt man nun die Rechnungen in der gleichen Weise durch, wie im Abschnitt 139, dann erhält man die gewünschte Gleichung des Sphäroids:

$$F = 2a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{e}\cdot l\left(\frac{a+e}{a-e}\right).$$

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Kubatur der Rotationskörper.

141. Erklärung und Ableitung der Grundformeln.

Wenn eine Kurve sich um eine feste Achse dreht, so beschreibt sie eine Fläche, wie wir es im vorigen Kapitel genau beschrieben haben. Diese Fläche umschließt einen bestimmten Raumteil. Wir wollen die Methoden ermitteln, um ihn zu bestimmen. Man bezeichnet die Operation als Kubatur der Körper. (Figur 30.) Die Kurve AB

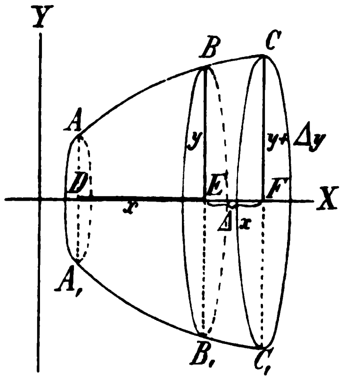


Fig. 30.

soll sich um die X=Achse, indem sie stets in derselben Entfernung bleibt, herumbewegen. Wir wollen den Inhalt „V" des Körpers ermitteln, den die Oberfläche umschließt.

Die Koordinaten des Punktes B seien x und y. Wächst nun die X=Achse DE um das Stück $\triangle x = EF$, dann muß auch V um $\triangle V = BCC,B,$ zunehmen. Das Volumen des Körpers ist eine Funktion von x. Wenn $\triangle x$ klein gedacht wird, und die Bogenstücke BC und B,C, als geradlinig

betrachtet werden dürfen, dann können wir das Körper-element BCB_1C_1 als einen abgestumpften Kegel auffassen. Aus den Lehren der Stereometrie folgt:

$$1)\quad \triangle V = \frac{\triangle x \,.\, \pi}{3}\left\{y^2 + y\,(y + \triangle y) + (y + \triangle y)^2\right\}.$$

Nähert sich $\triangle x$ der Grenze Null, d. h. wird es gleich dx, dann wird auch $\triangle y = dy$ und $\triangle V = dV$.

Aus der Gleichung 1) ergiebt sich:

$$2)\quad dV = \frac{dx \,.\, \pi}{3}\left\{y^2 + y\,(y + dy) + (y + dy)^2\right\}$$

$$= \frac{dx \,.\, \pi}{3}\left\{3y^2 + 3y\,dy + dy^2\right\}.$$

Es ist nun unmittelbar einleuchtend, daß die Ausdrücke $3y\,dy$ und dy^2, da sie mit Differentialen behaftet sind, gegen $3y^2$ verschwindend klein werden und vernachlässigt werden können, d. h. Null werden. Dann geht 2) über in:

$$3)\quad dV = \frac{dx \,.\, \pi}{3} \cdot 3y^2 = y^2\,dx \,.\, \pi.$$

Aus dem Körperelement ergiebt sich durch Integration der Körper. Somit wird endlich:

$$4)\quad V = \pi \int y^2\,dx.$$

Dreht sich die Kurve um die Y-Achse, dann führen dieselben Ueberlegungen zu der entsprechenden Formel:

$$4a)\quad V = \pi \int x^2\,dy.$$

142. Der Inhalt eines geraden Kegels.

Man kann sich einen geraden Kegel dadurch entstanden denken, daß sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete dreht. — In Fig. 31 mag sich das rechtwinklige Dreieck ACB um die X-Achse drehen. Es ist dann $AC = h$ die Höhe, BC der Radius und AB die Seitenlinie des Kegels.

Unmittelbar aus der Figur erhalten wir die Proportion:

$$x : y = h : r$$

und $$y = \frac{rx}{h}$$ als Gleichung der Linie.

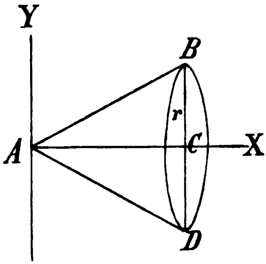


Fig. 31.

Also nach Formel 4):

$$V = \pi \int \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int x^2 dx.$$

Integrieren wir, so wird:

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} + C.$$

Das Integral muß genommen werden von $x = 0$ bis $x = h$. Das ergiebt:

$$V = \frac{\pi r^2 . h^3}{3h^2} = \frac{h . \pi r^2}{3} = \frac{1}{3} h r^2 \pi.$$

143. Der Inhalt des Paraboloids.

Das Paraboloid bildet sich, indem sich die Parabel um ihre Achse dreht. Die Gleichung der Parabel ist:

$$y^2 = 2px.$$

Die Aufgabe ist hier sehr leicht zu lösen, weil wir sofort das wichtigste Glied in die Formel 4) einfügen können. Also:

$$V = \pi \int 2px\,dx$$

$$= 2p\pi \int x\,dx.$$

Integrieren wir, dann ergiebt sich:

$$V = 2p\pi \frac{x^2}{2} + C$$

$$= 2px \frac{\pi . x}{2} + C.$$

Schreiben wir wieder für $2px = y^2$, dann wird:

$$V = \frac{y^2 \pi x}{2} + C.$$

Da für $x = 0$, auch $V = 0$ wird, so ist auch $C = 0$.

144. Der Inhalt des Sphäroids.

Da, wie wir bereits ausführten, ein Sphäroid durch Rotation um die kleine Achse einer Ellipse entsteht, so wird in diesem Falle $2b = CD$ zur Rotationsachse. Siehe Fig. 32.

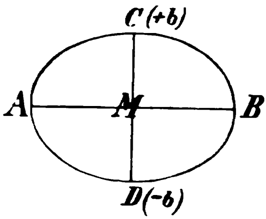


Fig. 32.

Die Gleichung der Ellipse ist, wie aus der analytischen Geometrie bekannt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lösen wir sie, auf Grund der vorstehenden Ueberlegung, nach x auf, so wird sie:

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Formel 4a) ein:

$$V = \pi\int\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)\,dy$$
$$= \frac{\pi a^2}{b^2}\int(b^2 - y^2)\,dy.$$

Integrieren wir:

$$\int(b^2 - y^2)\,dy = \int b^2\,dy - \int y^2\,dy$$
$$= b^2 y - \frac{y^3}{3} + C.$$

Eingesetzt ergiebt:

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2}\left\{b^2 y - \frac{y^3}{3}\right\} + C.$$

Wie man gut aus der Figur ersehen kann, muß von — b bis + b integriert werden, um den ganzen Sphäroidkörper zu erhalten. — Setzen wir diese Werte ein:

$$V_b = \frac{\pi a^2}{b^2}\left\{b^3 - \frac{b^3}{3}\right\} = \frac{\pi a^2 b^3}{b^2} - \frac{\pi a^2 b^3}{3 b^2}$$
$$= \pi a^2 b - \frac{\pi a^2 b}{3}.$$

$$V_{-b} = \frac{\pi a^2}{b^2}\left\{- b^3 + \frac{b^3}{3}\right\} = \frac{\pi a^2 b^3}{3 b^2} - \frac{\pi a^2 b^3}{b^2}$$
$$= \frac{\pi a^2 b}{3} - \pi a^2 b.$$

$$V_b - V_{-b} = \left|\begin{matrix} \pi a^2 b - \dfrac{\pi a^2 b}{3} \\ (-)\dfrac{\pi a^2 b}{3}(+)\pi a^2 b \end{matrix}\right| = 2\pi a^2 b - \tfrac{2}{3}\pi a^2 b.$$

$$V = V_b - V_{-b} = 2\pi a^2 b - \tfrac{2}{3}\pi a^2 b$$
$$V = \tfrac{4}{3} a^2 b \pi.$$

145. Formeln für die geometrischen Anwendungen der Integral-Rechnung.

I. Quadratur der Kurven: $F = \int y\,ds$.

$F = \frac{1}{2}\int r^2 d\alpha$ in Polarkoordinaten.

II. Rektifikation der Kurven.

$$s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$s = \int_{x_0}^{x} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}$$

in Polarkoordinaten.

III. Komplanation der Rotationsflächen.

$$F = 2\pi \int y\,ds$$
$$= 2\pi \int x\,ds.$$

IV. Kubatur der Rotationskörper.

$$V = \pi \int y^2 dx$$
$$= \pi \int x^2 dy.$$

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Die vielfachen Integrale.

146. Neue Erklärung des Integrals.

Bisher haben wir das Integral als eine Umkehrung des Differentials betrachtet. Wir wollen den Integralbegriff nun tiefer zu erfassen suchen. Gehen wir, um das zu ermög-

lichen, noch einmal auf das bestimmte Integral zurück. — Erinnern wir uns zunächst, daß in der Lehre von der Quadratur der Kurven die Aufgabe zu lösen war, den Inhalt der Ebene zu bestimmen, die begrenzt wurde von der Kurve $y = f(x)$, den beiden Endordinaten und der Abscissenachse. Denken wir uns die Abscissenachse QS der Kurve PR in n sehr kleine gleiche Teile $= \triangle x$ geteilt (siehe Fig. 33) und durch die Teilpunkte parallele Linien zur

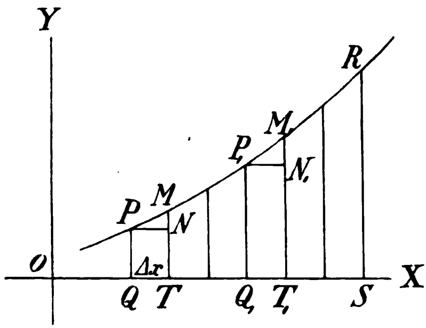


Fig. 33.

Y-Achse gelegt. Durch diese Konstruktion wird die Ebene in n Streifen zerlegt. Legen wir endlich noch parallel zur X-Achse durch die Punkte P, P_1 2c. entsprechende Linien. Ein jeder der genannten Streifen PMQT, $P_1M_1Q_1T_1$ 2c. zerfällt dann in ein Rechteck PNQT 2c. und in ein Dreieck PNM 2c. — Der Inhalt des Rechtecks ist $= y \triangle x$. Sei die Abscisse des Punktes P: a, also $x = a$, und die Abscisse des Punktes R: b, also $x = b$, dann ist die Summe aller Rechtecke, die dazwischen liegen, auszudrücken durch:

$$1)\ \text{Summe aller Rechtecke} = \sum_{x=a}^{x=b-\triangle x} y \triangle x.$$

In 1) bedeutet Σ das Zeichen für eine **endliche** Summe. Setzen wir $y = f(x)$, dann geht 1) über in:

$$2)\ \text{Summe aller Rechtecke} = \sum_{x=a}^{x=b-\triangle x} f(x)\triangle x.$$

Wird nun n sehr groß und daher $\triangle x$ sehr klein, daß es zu dx übergeht, dann werden auch die Dreiecke P M N rc. verschwindend klein werden, so daß man sie vernachlässigen kann. Damit ist nun aber die Zahl der Rechtecke unendlich groß geworden. Wollen wir sie nunmehr summieren, dann müssen wir für Σ das Integralzeichen $\int$ setzen. Daher läßt sich jetzt die Ebene darstellen durch das bestimmte Integral:

$$3)\qquad F = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= f(b) - f(a).$$

Wir erkennen somit, daß ein **Integral zu betrachten ist als eine Summe, die sich aus einer unendlich großen Anzahl von Elementen zusammensetzt. Eine Integration ist also eine Summation und das Integralzeichen „$\int$" ist ein Summationszeichen.**

147. Die vielfachen Integrale.

Die Ausführungen des vorstehenden Abschnittes führen zu den mehrfachen Integralen. Man denke sich die Strecke AB (siehe Fig. 34) in eine sehr große Zahl kleiner Teile geteilt und ebenso die Strecke AD. Zieht man nun durch die Teilpunkte zur X- und zur Y-Achse parallele Linien, dann zerfällt das Rechteck AC in eine sehr große Anzahl kleiner Rechtecke, von denen jedes den Inhalt dx . dy hat. Der Inhalt des Rechteckes AC ist dann als das Integral über das Produkt dx . dy zu betrachten und zwar zwischen

den Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$ und $y = 0$ bis $y = h$ *).
In Zeichen:

4) $$F = \int_0^a \int_0^h dx \, . \, dy.$$

Integriert man zuerst in Beziehung auf dx, also:

5) $$\int_0^a dx = a$$

und dann in Beziehung auf dy, also

6) $$a \int_0^h dy = ah = F,$$

dann erhält man den Flächeninhalt des Rechtecks. Man bezeichnet 4) als ein Doppelintegral. Da x und y ganz unabhängig in ihm sind, so ist es auch gleichgültig, nach

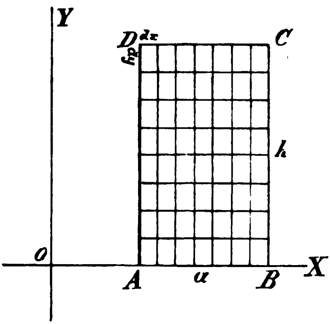


Fig. 34.

welcher Variablen man zuerst integriert. — Hiervon tritt eine Ausnahme ein, wenn x und y zu einander in einer bestimmten Beziehung stehen. Um das darzulegen, wollen wir eine Aufgabe durchführen.

*) Denke man sich der Einfachheit halber A im Anfangspunkt des Koordinatensystems.

148. Inhalt eines Dreiecks durch Doppelintegrale zu bestimmen.

Es soll der Inhalt des Dreiecks ABC (siehe Fig. 35) mit der Grundlinie a und der Höhe h bestimmt werden. Auch hier können wir uns, wie im vorigen Abschnitt, das Dreieck in Elemente zerlegt denken. In unserem vorliegenden Fall

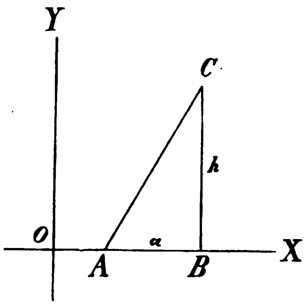


Fig. 35.

ist aber y nicht immer gleich, sondern mit wachsenden x veränderlich. Die kleinen Rechtecke dx . dy sind daher nicht immer dieselben. Es ist aber y selbst eine Funktion von x. — Wir wollen nun die Aufgabe formulieren. Die Linie AC wird durch die Gleichung:

7) $$y = \frac{h}{a} x$$

dargestellt. — Integrieren wir nun das Doppelintegral:

8) $$F = \int_0^x \int_0^y dx \, . \, dy$$

zunächst nach y; dann ergiebt sich:

9) $$F = \int_0^x y \, dx.$$

Führen wir den Wert von y ein, dann wird

10) $$F = \int_0^x \frac{h}{a} x\,dx = \frac{h}{a}\int_0^x x\,dx.$$

Da $\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$ ist, so wird

11) $$F = \frac{h}{a}\int_0^x x\,dx = \frac{hx^2}{2a}.$$

Da das Integral unserer Figur entsprechend von $x = 0$ bis $x = a$ zu bestimmen ist, so setzen wir in 11) $x = a$. Somit wird:

12) $$F = \frac{h \cdot a^2}{2a} = \tfrac{1}{2}\,ah.$$

149. Das dreifache Integral.

Durch ein dreifaches Integral kann man sich leicht und anschaulich den Inhalt eines Körpers dargestellt denken. Stelle man sich vor, daß durch einen Körper drei sich unter

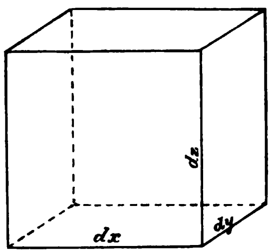


Fig. 36.

rechten Winkeln schneidende Ebenen gelegt sind und zu diesen sehr viele parallele Ebenen, dann ist der Körper in eine große Zahl kleiner Prismen geteilt. Ist die Zahl der Ebenen unendlich groß, dann ist die Grundfläche von jedem Ele=

mentarprisma ein Rechteck vom Inhalt dx . dy. Die Höhe eines jeden Prismas ist dz. Somit ist der Inhalt eines Elementarprismas (siehe Fig. 36) auszudrücken durch dx . dy . dz. Also:

13) $$dV = dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Das Gesamtvolumen entspricht dem dreifachen Integral ausgedehnt über dV. Also:

14) $$V = \int\int\int dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen.

150. Erklärung und Einteilung der Differentialgleichungen.

Die Gleichungen, in denen sich veränderliche Größen nebst ihren Differentialen und Differentialquotienten befinden, nennt man Differentialgleichungen. Sie werden in gewöhnliche und in partielle Differentialgleichungen eingeteilt, jenachdem sie totale oder partielle Differentialquotienten enthalten. Es ist z. B.:

$$y\frac{dx}{dy} = mx$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung und:

$$p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} = 2T$$

eine partielle Differentialgleichung.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die ursprüngliche Gleichung zu finden, aus der die Differentialgleichung entstanden ist. Diese nennt man die Integralgleichung.

Man teilt die Differentialgleichungen nach der Höhe des Differentials oder des Differential-

quotienten in Differentialgleichungen von der 1ten, $2^{ten} \ldots n^{ten}$ Ordnung ein. So ist beispielsweise:

$$x\,dy - y\,dx = 0, \quad \text{oder} \quad y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Zudem zerfallen die Differentialgleichungen noch in Grade, wie die algebraischen Gleichungen. Den Grad bezeichnet die höchste Potenz, in der sich das Differential in ihnen befindet.

In der von uns schon angeführten Gleichung:

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

stehen die Differentiale in der ersten Potenz; sie ist daher eine Differentialgleichung ersten Grades und, wie wir wissen, auch erster Ordnung. Die Gleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ax + by = 0$$

ist nach der Definition vom zweiten Grade.

151. Homogene Differentialgleichungen.

Man bezeichnet eine Differentialgleichung als homogen, wenn die Summe der Exponenten der Variablen in jedem Gliede dieselbe ist. So ist z. B.:

$$xy\,dy + x^2dx + y^2dy = 0$$

eine homogene Differentialgleichung, denn die Summe der Exponenten ist in jedem Gliede gleich zwei.

152. Die unmittelbare Integration vollständiger Differentiale.

Im dreizehnten Kapitel sind die Merkmale besprochen worden, aus denen man ein vollständiges Differential erkennen kann. Ist danach:

1) $$z = f(x, y),$$

dann ergiebt sich:

2) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

als das totale Differential der Funktion 1). Differentiierten wir sodann den Ausdruck $\frac{\partial z}{\partial x}$ nach y und $\frac{\partial z}{\partial y}$ nach x, so erhielten wir die gleichen Differentiale:

3) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y \,.\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}.$$

Es ist also ein Kennzeichen für ein vollständiges Differential, daß es als gleichgültig erscheint, ob man die Funktion erst nach x und dann nach y, oder umgekehrt differentiiert hat.

Wir wollen, wie es gebräuchlich ist, 2) und 3) ein wenig anders schreiben. Setzen wir die partiellen Differentiale der Funktion:

$$z = f(x, y),$$

4) $$\frac{\partial z}{\partial x} = P \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q,$$

dann geht Gleichung 2) über in:

5) $$dz = P dx + Q dy.$$

Differentiieren wir nun P nach y und Q nach x, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \,.\, \partial x} \qquad \text{und:}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y}.$$

6) Es ist also: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Grundsatz: Hat ein Differential die Form:

7) $$P dx + Q dy,$$

oder läßt es sich auf diese Form bringen und ist zudem, gemäß 6) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, dann ist das Differential ein vollständiges.

Auf die Form 7) lassen sich die Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades stets zurückführen. Gilt dann auch 6), so ist die Integration immer möglich!

153. Beweis für den Grundsatz.

Nehmen wir an, daß eine Gleichung von der Form:

8) $$dz = P dx + Q dy$$

gegeben sei, und daß zudem:

9) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ist. Wir erinnern uns, daß hierin $P = \frac{\partial z}{\partial x}$ gesetzt worden war. Wir wollen nun integrieren, indem wir y als konstant betrachten:

10) Also: $z = \int P dx + Y$.

Y ist die Integrationskonstante und als eine Funktion von y zu betrachten. — Setzen wir nunmehr:

11) $$\int P dx = U,$$

so ergiebt sich, wenn wir diesen Wert in 10) einfügen:

12) $$z = U + Y.$$

Die Teile von z sollen im Einzelnen bestimmt werden. Differentiieren wir daher diese Gleichung nach y:

13) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dY}{dy},$$

und setzen, wie bekannt: $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$, dann erhalten wir:

14) $$Q = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dY}{dy}.$$

Nach $\frac{dY}{dy}$ aufgelöst, ergiebt:

15) $$\frac{dY}{dy} = Q - \frac{\partial U}{\partial y}$$ oder:

$$dY = Q\,dy - \frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

Es wird die Integration nach y ausgeführt:

16) $$Y = \int\left(Q - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + C,$$

und dieser Wert von Y in 12) eingesetzt, dann haben wir:

17) $$z = U + \int\left(Q - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + C.$$

154. Beispiele.

Die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen sollen nun an einigen speziellen Beispielen erläutert werden. Wir haben die Gleichung:

$$dz = (3y^2 - 4x^2)\,dy + (3x^2 - 8xy)\,dx.$$

Die Gleichung soll integriert werden.

Zunächst haben wir zu untersuchen, ob unsere Gleichung ein vollständiges Differential ist. Setzen wir dazu:

$$P = 3x^2 - 8xy$$ und

$$Q = 3y^2 - 4x^2.$$

Die Gleichung hat also die gewünschte Form:

$$P\,dx + Q\,dy = dz.$$

Nun ist noch nach den Regeln in Abschnitt 153 zu zeigen, daß auch:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ ist.

Differentiieren wir P und Q um das zu ermitteln:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 - 8xy)}{\partial y} = -8x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(3y^2 - 4x^2)}{\partial x} = -8x.$$

Unsere Gleichung stellt ein vollständiges Differential dar, wir können also nach den Methoden des vorigen Abschnittes direkt integrieren.

Nach Gleichung 11) wurde $\int P\,dx = U$ gesetzt. Also:

$$U = \int P\,dx = \int (3x^2 - 8xy)\,dx.$$

Man erhält aus Gleichung 12): $z = U + Y$:

$$z = \int (3x^2 - 8xy)\,dx + Y,$$

$$z = x^3 - 4x^2y + Y.$$

Nun muß Y bestimmt werden. Differentiieren wir nach y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x^2 + \frac{dY}{dy}$$ oder:

$$Q = -4x^2 + \frac{dY}{dy}.$$

Lösen wir in entsprechender Weise auf, dann ist:

$$\frac{dY}{dy} = Q + 4x^2$$ und:

$$dY = Q\,dy + 4x^2\,dy.$$

Setzen wir nun den Wert von Q ein, dann wird:

$$dY = (3y^2 - 4x^2)\,dy + 4x^2\,dy$$

$$= 3y^2\,dy - 4x^2\,dy + 4x^2\,dy$$

$$= 3y^2\,dy.$$ Endlich:

$$Y = \int 3y^2\,dy = y^3 + C.$$

Fügen wir in die Gleichung $z = U + Y$ auch noch den Wert für Y ein, dann erhalten wir die gewünschte Integralgleichung:

$$z = x^3 - 4x^2y + y^3 + C.$$

155. Ein zweites Beispiel.

Gegeben sei die Gleichung:

$$dz = (2mx + ny + r)dx + (2py + nx + s)dy.$$

Wir setzen: $P = 2mx + ny + r$ und:

$$Q = 2py + nx + s.$$

Unsere Gleichung entspricht also der Form:

$$Pdx + Qdy = dz.$$

Untersuchen wir, ob sie ein vollständiges Differential darstellt. Es ist:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2mx + ny + r)}{\partial y} = n$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2py + nx + s)}{\partial x} = n.$$

Also wir haben auch hier $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, und können integrieren. — Nach Regel 11) ist:

$$U = \int Pdx = \int (2mx + ny + r)dx$$
$$= mx^2 + nxy + rx.$$

In $z = U + Y$ eingesetzt, wird:

$$z = mx^2 + nxy + rx + Y.$$

Nach y differentiiert:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = nx + \frac{dY}{dy},$$

und daraus, wenn $Q = \frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{dY}{dy} = Q - nx,$$

$$dY = Qdy - nxdy.$$

Setzen wir nun den Wert von Q ein:

$$Q = 2py + nx + s, \qquad \text{dann wird:}$$

$$dY = (2py + nx + s)dy - nxdy.$$

Integriert:

$$Y = \int (2py + nx + s)dy - nxdy + C$$
$$= py^2 + nxy + sy - nxy + C$$
$$= py^2 + sy + C.$$

Fügen wir die Werte endlich in die Gleichung $z = U + Y$ ein, dann erhalten wir die Integralgleichung:

$$z = mx^2 + nxy + rx + py^2 + sy + C.$$

156. Allgemeine Form der Differentialgleichung vom ersten Grade und der ersten Ordnung.

Will man ganz allgemein eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades darstellen, dann bezeichnet man sie durch:

18) $$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Man kann sie immer, wie wir sahen, auf die Form:

$$Pdx + Qdy = 0 \qquad \text{zurückführen.}$$

Löst man den Ausdruck 18) auf, dann erhält man auch die Form:

19) $$\frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

Ist nun P eine Funktion von x und Q eine Funktion von y, also:

20) $$P = X \quad \text{und} \quad Q = Y,$$

so erhält man das Integral:

21) $$\int X\,dx + \int Y\,dy = C.$$

Das Integral kann man aber immer mit Hilfe unserer Integrationsformeln integrieren. Ist es nun nicht der Fall, daß die Integrale in dieser Form sich unmittelbar darbieten, dann kann man es in vielen Fällen durch Trennung (Separation) der Veränderlichen erreichen.

157. Integration durch Trennung der Variabeln.

An einigen Beispielen wollen wir auseinandersetzen, wie man sich in solchen Fällen verhält.

Die Differentialgleichung:

$$x\,dy = y\,dx$$

soll integriert werden.

Dividiert man sie durch das Produkt xy, so erhält man:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

oder:
$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Die Gleichung entspricht der Form 21) und kann sofort integriert werden. Es ist:

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Ausgeführt:
$$ly - lx = lC.$$

Es ist vorteilhaft, in einem solchen Falle die Integrationskonstante auch unter das Logarithmenzeichen zu setzen. Nehmen wir den Numerus, dann erhalten wir, nachdem wir gesetzt haben:

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = lc,$$

$$\frac{y}{x} = c$$

oder:
$$y = Cx.$$

158. Ein zweites Beispiel.

Die Differentialgleichung sei:

$$XY\,dx + X_{,}Y_{,}\,dy = 0.$$

Es sind in ihr X und $X_{,}$ Funktionen von x, und Y und $Y_{,}$ Funktionen von y.

Dividieren wir die Gleichung durch $X_{,}Y$, so erhalten wir:

$$\frac{X}{X_{,}}\,dx + \frac{Y_{,}}{Y}\,dy = 0.$$

Wie man sieht, ist das ein Ausdruck, den man direkt integrieren kann. Es wird:

$$\int\frac{X}{X_{,}}\,dx + \int\frac{Y_{,}}{Y}\,dy = C.$$

159. Ein drittes Beispiel.

Wir wollen nun einige Beispiele vorführen, in denen geometrische Aufgaben durch Differentialgleichungen ihre Lösung finden. Es soll die Gleichung der krummen Linie ermittelt werden, bei der die Subnormale der Abscisse gleich ist.

Wie wir in Kapitel 10 zeigten, ist die Formel für die Subnormale $= y\frac{dy}{dx}$. Also wird unsere Gleichung:

$$y\frac{dy}{dx} = x.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$ydy = xdx.$$

Die Variabeln sind somit separiert.

Integrieren wir:

$$\int ydy + c - \int xdx + c = 0.$$

Daher: $$y^2 + 2c = x^2.$$

Setzen wir $2c = r^2$, dann haben wir:

$$y = \sqrt{x^2 - r^2}.$$

Das ist die gesuchte Gleichung.

160. Ein viertes Beispiel.

Wie heißt die Gleichung der Linie, deren Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist? — Die Formel für die Subtangente ist nach Kapitel 10 $= y\frac{dx}{dy}$. Wir erhalten somit den Ansatz:

$$y\frac{dx}{dy} = 2x.$$

Sofort ergiebt sich hieraus die Trennung der Variabeln:

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integriert: $$2ly = lx + lc$$

$$= lcx.$$

Gemäß den Gesetzen der Logarithmen:

$$y^2 = cx.$$

Das ist aber die Formel für die Parabel.

161. Nutzen der Differentialgleichungen.

Aus den vorstehenden Beispielen tritt recht klar der Nutzen der Differentialgleichungen hervor. Wir ersehen aus ihnen, daß man aus gewissen Beziehungen, die man z. B. an

einer Linie ermittelte, fähig ist, die ganze Kurve festzustellen. So kann man in den Naturwissenschaften aus einzelnen Beobachtungen den Weg, d. h. die Kurve finden, auf der sich ein Körper, z. B. ein Planet, bewegen muß.

162. Integrationsmethode durch Substitution.

Schon in den Elementen der Algebra wird gezeigt, daß man durch Einführung entsprechender Ausdrücke, einer Gleichung eine für die Berechnung geschicktere Form geben kann. Auch die Integration komplizierter Funktionen erleichterten resp. ermöglichten wir überhaupt im Vorstehenden durch geschickte Substitutionen. Dasselbe gilt auch für die Differentialgleichungen, wenn man die Integralgleichungen zu finden wünscht.

Wir wollen uns dabei merken, daß eine Differentialgleichung immer durch Substitution integrierbar gemacht werden kann, wenn sie homogen ist. — Auch das soll an Beispielen gezeigt werden.

163. Ein Beispiel.

Die homogene Differentialgleichung:

$$(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$$

soll integriert werden. Setzen wir in unserem Falle:

$$y = rx,$$

dann ist auch: $\quad dy = r\,dx + x\,dr.$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein:

$$(x + rx)\,dx + (rx - x)(r\,dx + x\,dr) = 0.$$

Dividieren wir durch x, dann ist:

$$\frac{x(1 + r)\,dx}{x} + \frac{x(r - 1)(r\,dx + x\,dr)}{x} = 0$$

und: $\quad (1 + r)\,dx + (r - 1)(r\,dx + x\,dr) = 0.$

Lösen wir die Klammern:

$$dx + rdx + r^2dx + rxdr - rdx - xdr = 0.$$

$$dx + r^2dx + rxdr - xdr = 0.$$

Fassen wir die entsprechenden Glieder zusammen:

$$(1 + r^2)\,dx + x\,(r - 1)\,dr = 0.$$

Durch die Trennung der Variabeln erhalten wir:

$$\frac{dx}{x} + \frac{(r-1)\,dr}{1+r^2} = 0$$

oder:

$$\frac{dx}{x} + \frac{rdr}{1+r^2} = \frac{dr}{1+r^2}.$$

Nun ist die Integration unmittelbar möglich:

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{rdr}{1+r^2} = \int\frac{dr}{1+r^2}.$$

Und: $$lx + \tfrac{1}{2}\,l\,(1 + r^2) + lc = \text{arc tang}\,r.$$

Setzen wir nun die ursprünglichen Werte wieder zurück. Es war $y = rx$; daher:

$$r = \frac{y}{x}; \quad r^2 = \frac{y^2}{x^2}.$$ Somit:

$$lx + \tfrac{1}{2}\,l\left\{1 + \frac{y^2}{x^2}\right\} + lc = \text{arc tang}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Endlich mit Berücksichtigung der logarithmischen Regeln:

$$lc\,(x^2 + y^2)^{1/2} = \text{arc tang}\left(\frac{y}{x}\right).$$

164. Ein zweites Beispiel.

Es soll die Gleichung für eine Kurve ermittelt werden, deren Subtangente der Differenz zwischen der Ordinate und der Abscisse gleich ist. Mit Be-

rücksichtigung der Ableitungen im Kapitel 10 erhalten wir die Gleichung:

$$y\frac{dx}{dy} = y - x$$

oder: $$ydx = (y - x)\,dy.$$

Als Substitutionsgröße setzen wir: $x = ry$. Dadurch wird: $dx = rdy + ydr$. — Setzen wir die Werte ein:

$$\left.\begin{aligned} &y(r.dy + ydr) = (y - ry)dy \\ &rydy + y^2dr = ydy - rydy \\ &y^2dr + 2rydy = ydy \\ &y^2dr + (2ry - y)dy = 0 \\ &y^2dr + y(2r - 1)dy = 0 \\ &ydr + (2r - 1)dy = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{und entwickeln nach der Reihe.}$$

Dividiert durch $(2r - 1)y$ ergiebt endlich:

$$\frac{dr}{2r - 1} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Durch Integration folgt unmittelbar:

$$\tfrac{1}{2}l(2r - 1) + ly = lc.$$

Setzen wir nun wiederum $r = \frac{x}{y}$, so wird:

$$ly + \tfrac{1}{2}l\left(\frac{2x - y}{y}\right) = lc.$$

Quadrieren wir:

$$ly^2 + l\left(\frac{2x - y}{y}\right) = lc^2$$

$$l(2xy - y^2) = lc^2.$$

Fallen die Logarithmenzeichen fort und fassen wir zusammen, dann ergiebt sich endlich:

$$2xy - y^2 = c^2$$

und: $$y(2x - y) = c^2.$$

165. Das Homogenmachen der Differentialgleichungen.

Sind Differentialgleichungen nicht homogen, so gelingt es doch häufig, sie homogen zu machen. Das geschieht zumeist durch entsprechende Substitutionen. Auch ist oft eine Verschiebung des Koordinatensystems erfolgreich, indem man z. B. $x = x_1 + u$ und $y = y_1 + v$ setzt und u und v ermittelt.

166. Die linearen Differentialgleichungen.

Man bezeichnet hiermit eine Art Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades von der Form:

22) $$dy + yf(x)dx = F(x)dx.$$

In dieser Gleichung bedeuten f(x) und F(x) stetige Funktionen von x. — Es giebt zur Lösung dieser Differentialgleichung viele Wege, wir bedienen uns im Anschluß an die vorhergehenden Ausführungen der Methode der Substitution. — Es sei hierzu wiederum $y = rz$ und $dy = rdz + zdr$.

Fügen wir diese Ausdrücke in Gleichung 22) ein.

23) $$rdz + zdr + rzf(x)dx = F(x)dx.$$

Fassen wir entsprechend zusammen und reduzieren auf Null, dann ist:

24) $$[rdz + rzf(x)dx] + (zdr - F(x)dx) = 0.$$

Wir dürfen annehmen, daß eine jede der beiden Klammern für sich Null ist, und wir haben somit auch zwei Gleichungen, aus denen die Unbekannten r und z ermittelt werden können. Das wollen wir nun durchführen.

Die beiden Gleichungen lauten:

25) $$\alpha)\quad rdz + rzf(x)dx = 0$$

$$\beta)\quad zdr - F(x)dx = 0.$$

Reduzieren wir zunächst α) in folgender Weise:

$$rdz + rzf(x)dx = 0;$$

dafür: $$dz + zf(x)dx = 0$$

und $$\frac{dz}{z} = -f(x)dx.$$

Integrieren wir:

$$\int \frac{dz}{z} = -\int f(x)dx,$$

dann ist: $$lz = -\int f(x)dx$$

und: $$z = e^{-\int f(x)dx}.$$

Behandeln wir nun die Gleichung β):

$$zdr - F(x)dx = 0$$

$$dr = \frac{F(x)dx}{z}.$$

In diesen Ausdruck setzen wir den Wert von z ein. Also:

$$dr = \frac{F(x)dx}{e^{-\int f(x)dx}}.$$

Integriert: $$r = \int \frac{F(x)dx}{e^{-\int f(x)dx}} + C$$

$$r = \int F(x) . e^{\int f(x)dx} dx + C.$$

Setzen wir die Werte für z und r endlich in den Substitutionsausdruck $y = rz$ ein.

Dann ergiebt sich:

26) $$y = e^{\int - f(x)dx} \left\{ \int F(x) . e^{\int f(x)dx} dx + C \right\}.$$

167. Ein Beispiel.

Die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay = be^{2x}$$

soll integriert werden.

Möge der Leser die Aufgabe zur Uebung durchführen. Die Lösung giebt:

$$y = \frac{b}{2+a}\left\{e^{2x} + ce^{-ax}\right\}.$$

168. Der integrierende Faktor.

Wir sehen, daß jede Differential-Gleichung erster Ordnung und ersten Grades sich auf die Form:

27) $$Pdx + Qdy = 0$$

zurückführen läßt. Es kann nun der Fall eintreten, daß das Differential zwischen den Variabeln x und y kein vollständiges ist, daß die Integration also nicht unmittelbar durchgeführt werden kann. Man ist in solchen Fällen immer im stande einen Faktor u anzugeben, der selbst eine Funktion von x und y ist und der das Differential zu einem vollständigen macht. Die Zahl u nennt man den integrierenden Faktor.

Führen wir den integrierenden Faktor in 27) ein, dann geht die Form über in:

28) $$P.u.dx + Q.udy = 0.$$

Unseren Ausführungen im dreizehnten Kapitel entsprechend muß dann als Kennzeichen für ein vollständiges Differential die Beziehung gelten:

29) $$\frac{\partial(u.P)}{\partial y} = \frac{\partial(u.Q)}{\partial x}.$$

Führen wir den Ausdruck 29) aus. Das giebt:

$$P\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial x}$$ und daraus:

30) $$u\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} = P\frac{\partial u}{\partial y} - Q\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ist es möglich, u aus der Gleichung 30) zu ermitteln, dann ist es nur nötig, das Differential mit u zu multiplizieren und die Integration ist zu vollenden.

Wir wollen einige einfachen Fälle hier mitteilen.

169. Der integrierende Faktor u ist allein eine Funktion von x.

Ist das der Fall, dann wird in Gleichung 30):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}.$$

Fügen wir diese Werte in 30) ein, so wird:

31) $$u\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} = -Q\frac{du}{dx}$$

und hieraus: $$\frac{du}{u} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{-Q} \cdot dx$$

$$= \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx.$$

Und wird integriert, so ergiebt sich:

32) $$lu = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx.$$

170. Der integrierende Faktor u sei allein eine Funktion von y.

In der Gleichung 30) wird dann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dy}.$$

Führen wir dieselben Rechnungen wie in 169 aus, dann ergiebt sich:

$$\frac{du}{u} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \cdot dy$$ und:

33) $$lu = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy.$$

171. Ein Beispiel durch Probe.

In sehr vielen Fällen kann man unmittelbar erkennen, wie der integrierende Faktor lauten muß. Sei z. B. die Differential-Gleichung:

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

gegeben.

Untersuchen wir, ob hier ein vollständiges Differential vorliegt. Sei zu dem Zweck

$$P = x \quad \text{und} \quad Q = -y, \qquad \text{dann ist:}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1$$

und:
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -1.$$

Das Differential ist also nicht vollständig. Man erkennt nun sehr leicht, daß, wenn die Gleichung durch $x . y$ dividiert wird, ein Ausdruck erscheint, der integrierbar ist. Nämlich:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Also:
$$ly - lx = lc$$

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = lc$$

$$\frac{y}{x} = c.$$

Und endlich:
$$y = cx.$$

Der integrierende Faktor war in diesem Falle: $\frac{1}{xy}$.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen (Fortsetzung).

172. Differentialgleichungen erster Ordnung und höheren Grades.

Wir müssen uns an dieser Stelle mit einigen einfachen Fällen begnügen, die einen Einblick in den Gang der Lösungen geben. Die Gleichungen höheren Grades führen zumeist auf Schwierigkeiten, die den Rahmen des vorliegenden kleinen Werkchens weit übersteigen. — Um zum schnellen Verständnis zu gelangen, sei eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades gegeben:

1) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0,$$ oder:

1a) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2.$$

Ziehen wir die Wurzel, so erhalten wir sofort die beiden Gleichungen:

2) $$\frac{dy}{dx} = a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -a.$$

Und daraus:

3) $$dy = a\,dx \quad \text{und} \quad dy = -a\,dx.$$

Durch Integration ergiebt sich:

4) $$y = ax + c; \quad y = -ax + c_,.$$

Dann erhält man das vollständige Integral durch Multiplikation. Also:

5) $$(y - ax - c)(y + ax - c_,) = 0.$$

Je höher der Grad einer Gleichung ist, um so mehr Wurzeln und Integralgleichungen wird man erhalten. Eine Gleichung nten Grades ergiebt somit n

Wurzeln und n Integralgleichungen. Die Ermittelung der Wurzeln führt aber im allgemeinen auf große algebraische Schwierigkeiten.

173. Andere Lösungen.

Für bestimmte Fälle kann man den Differentialgleichungen höheren Grades auch noch auf andere Weise nahe treten; das soll an einigen Fällen klargelegt werden.

Sei eine Differentialgleichung gegeben, die die Variable y nicht enthält und nach x auflösbar ist. Setzen wir, wie schon häufig an anderen Stellen,

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{also} \quad dy = p\,dx.$$

Die genannte Gleichung wird die Form haben:

6) $$x = \varphi(p).$$

Differentiieren wir 6), dann ist:

7) $$dx = \varphi'(p)\,dp.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

8) $$dy = p\,dx = \varphi'(p)\,p\,dp.$$

Durch die Integration folgt sodann:

9) $$y = \int \varphi'(p) \cdot p\,dp + C.$$

Die Gleichungen 6) und 9) gestatten die Elimination von p; dann hat man die Gleichung zwischen x und y. — Das wollen wir durch ein Beispiel erläutern:

174. Ein Beispiel.

Es sei:

$$x = 3p^4 - 5p^2 + 6p - 5.$$

Verfahren wir nun ganz wie in 173. Zunächst differentiieren wir:

$$dx = (12p^3 - 10p + 6)\,dp.$$

Wir können nun schreiben:

$$dy = p\,dx = (12p^3 - 10p + 6) . p\,dp$$
$$= (12p^4 - 10p^2 + 6p)\,dp.$$

Integriert:

$$y = \int (12p^4 - 10p^2 + 6p)\,dp$$
$$= {}^{12}/_5\, p^5 - {}^{10}/_3\, p^3 + 3p^2 + C.$$

Aus der ersten und der letzten Gleichung dieses Beispieles ist endlich p zu eliminieren:

175. Andere Lösungsmethode.

Es kann eine Gleichung wie in 173 behandelt werden, wenn sie die Variable x nicht enthält und nach y auflösbar ist. Die Gleichung lautet:

10) $$y = \varphi(p).$$

Da wir $p = \frac{dy}{dx}$ setzen, ist wiederum $dy = p\,dx$.

Aus Gleichung 10) erhalten wir $dy = \varphi'(p)\,dp$, also ergiebt sich:

11) $$dy = p\,dx = \varphi'(p)\,dp.$$

Hieraus:

12) $$dx = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p}$$

Integriert:

13) $$x = \int \frac{\varphi'(p)\,dp}{p} + C.$$

176. Lösungsmethoden.

Eine Lösung läßt sich auch finden, wenn die Differentialgleichung in der Form erscheint:

14) $$y = px + \varphi(p) = \frac{dy}{dx} \cdot x + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Differentiieren wir die Gleichung 14), dann ist:

15) $$dy = p\,dx + x\,dp + \varphi'(p)\,dp.$$

Wir erinnern uns, daß wir schreiben konnten:

16) $$dy = p\,dx.$$

Subtrahieren wir den Ausdruck 16) vom Ausdruck 15), dann bleibt:

17) $$x\,dp + \varphi'(p)\,dp = 0$$ oder:

17a) $$\{x + \varphi'(p)\}\,dp = 0.$$

Diese Gleichung muß nun, wie wir aus der Algebra wissen, den Beziehungen genügen:

18) $$dp = 0$$ und

19) $$x + \varphi'(p) = 0.$$

Die Integration von Gleichung 18) ergiebt sofort:

20) $$p = c.$$

Setzen wir diesen Wert in die Ursprungsgleichung 14) ein, dann erhalten wir die Lösung:

21) $$y = cx + \varphi(c).$$

Auch die Gleichung 19) führt uns zu einer Bestimmung von 14). Wir ersehen sofort aus 19), daß man sie auf p zurückführen kann; man empfängt dann die Lösung:

$$p = f(x).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in 14) ein, dann erhalten wir eine zweite Lösung:

22) $$y = f(x) \cdot x + \varphi\{f(x)\}.$$

Die beiden Gleichungen 21) und 22) haben keine Konstanten, sie können daher auch nicht einem vollkommenen Integral der Ursprungsgleichung entsprechen. Man bezeichnet solche Integrationen der Differentialgleichungen, die ohne wirkliche Integration durchgeführt wurden, als singuläre Integrale oder besondere Auflösungen.

177. Ein Beispiel.

Die Differentialgleichung soll heißen:

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß sie der Form 14) im vorigen Abschnitt entspricht. Um das zu erreichen dividieren wir sie durch dx, dann wird sie:

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzen wir nun, wie gebräuchlich ist, $p = \frac{dy}{dx}$, dann ist:

$$y - px = a\sqrt{1 + p^2}.$$

Oder:

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2}.$$

Der Ausdruck stimmt mit 14) überein.

Verfahren wir nun ganz wie im vorstehenden Abschnitt. Wir differentiieren:

$$dy = p\,dx + x\,dp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\,dp.$$

Subtrahieren wir hiervon $dy = p\,dx$, dann bleibt:

$$x\,dp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\,dp = 0,$$

oder:

$$\left(x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right)dp = 0.$$

Wiederum giebt das die beiden Gleichungen:

$$dp = 0$$

und

$$x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = 0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhalten wir: $p = c$. Setzen wir in die Gleichung für y ein, dann haben wir das singuläre Integral: $y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$.

Wir wollen nun das andere singuläre Integral ermitteln. Die Gleichung $x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0$ giebt nach p aufgelöst:

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzen wir auch diesen Wert in die Gleichung für y ein, so erhalten wir:

$$y = \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{\pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Endlich als zweite singuläre Auflösung:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

178. Die Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Die Differentialgleichungen der höheren Ordnung gehören mit zu den schwierigsten Gebieten der höheren Mathematik. Sie sind nur in einigen besonderen Fällen vollkommen zu integrieren. Dennoch spielen gerade sie in der Physik und den verwandten Disziplinen eine sehr bedeutende Rolle. Von solchen praktischen Aufgaben wollen wir hier einige vorführen.

179. Ein Beispiel.

Es sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a. \tag{23}$$

Setzen wir wieder $p = \frac{dy}{dx}$, dann wird:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = a.$$

Daher $\frac{dp}{dx} = a; \quad dp = a dx.$

Integrieren wir diesen Ausdruck:

$$\int dp = a \int dx,$$ so wird:

24) $$p = ax + c.$$

Setzen wir nun wieder den Wert für p ein:

$$\frac{dy}{dx} = ax + c,$$ oder:

$$dy = axdx + cdx$$ und integrieren:

25) $$y = a\int xdx + c\int dx$$

$$= \frac{ax^2}{2} + cx + d.$$

180. Differentialgleichungen, in denen sich der eine Differentialquotient als eine Funktion des nächstniedrigeren Differentialquotienten darstellen läßt.

Es sei daher:

26) $$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Setzen wir die Bezeichnung p ein, dann geht 26) über in:

27) $$\frac{dp}{dx} = F(p).$$ Also:

$$dx = \frac{dp}{F(p)},$$ und:

28) $$x = \int \frac{dp}{F(p)} + C_1.$$

Da nun $dy = pdx$ ist und $dx = \frac{dp}{F(p)}$, so ist auch:

$$dy = \frac{pdp}{F(p)}.$$

Integrieren wir endlich, so wird:

29) $$y = \int \frac{p\,dp}{F(p)} + C_2.$$

Nehmen wir hierzu eine Aufgabe als Beispiel.

181. Eine Aufgabe.

Es sei die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \text{gegeben.}$$

Mit Hilfe der bekannten Beziehungen wird sie:

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$$

und hieraus, nach den Ausführungen des vorstehenden Abschnittes, wird weiter:

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad \text{und:}$$

$$dy = \frac{p\,dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Integrieren wir nun, dann entstehen die Gleichungen:

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = l\left\{p + \sqrt{1 + p^2}\right\} + C_1$$

$$y = \int \frac{p\,dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \sqrt{1 + p^2} + C_2.$$

Berechnen wir hieraus zunächst p. Also:

$$(y - C_2)^2 = 1 + p^2. \qquad \text{Daher:}$$

$$p = \sqrt{(y - C_2)^2 - 1}.$$

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für x ein, dann ergiebt sich endlich:

$$x = l\left\{y - C_2 + \sqrt{(y - C_2)^2 - 1}\right\} + C_1.$$

182. Der zweite Differentialquotient sei eine Funktion der Abscisse.

Also:

30) $$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x).$$

Setzen wir wieder $p = \frac{dy}{dx}$, dann wird:

$$\frac{dp}{dx} = F(x)$$ und:

31) $$dp = F(x)dx,$$

32) $$p = \int F(x)dx + C_1.$$

Setzen wir für das Integral:

$$\int F(x)dx = f(x),$$

dann geht 32) über in:

$$dy = f(x)dx + C_1 dx.$$

Integrieren wir:

33) $$y = \int f(x)dx + C_1 x + C_2.$$

183. Der zweite Differentialquotient sei eine Funktion von y.

Die Gleichung lautet somit:

34) $$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y).$$

Wiederum bedienen wir uns der Ausdrücke:

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Daher wird:

34 a) $$\frac{dp}{dx} = F(y) \quad \text{und} \quad dp = F(y)dx.$$

Da nun, wie man sofort erkennt, $dx = \frac{dy}{p}$ wird, erhalten wir:

35) $$dp = F(y)dx = \frac{F(y)dy}{p}.$$

Hieraus wiederum folgt, wenn man mit zwei multipliziert:

$$2pdp = 2F(y)dy.$$

Integriert:

36) $$p^2 = 2\int F(y)dy + C_1.$$

Somit: $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int F(y)dy + C_1}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int F(y)dy + C_1}}.$$

Endlich:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int F(y)dy + C_1}} + C_2.$$

184. Gleichungen von höherer Ordnung als der zweiten finden in der Mechanik und Physik nur sehr selten Verwendung; wir wollen es also für unsere engen Verhältnisse mit den vorstehenden Beispielen bewenden lassen.

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Die komplexen Zahlen.

185. Allgemeine Erklärung.

Schon in der Algebra werden wir mit einer eigentümlichen Zahlengruppe, den imaginären Zahlen, bekannt. Eine imaginäre Zahl entsteht bekanntlich, wenn man eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl zu ermitteln versucht. So ist z. B. der Ausdruck $\sqrt{-4}$ eine imaginäre Zahl. Alle imaginären Zahlen kann man auf eine bestimmte Größe zurückführen, so ist: $\sqrt{-4} = 2 . \sqrt{-1}$.

Der Ausdruck $\sqrt{-1}$ wird bekanntlich seit Gauß mit dem Buchstaben i bezeichnet. Der Wert von $\sqrt{-1} = i$ ist,

wenn man ihn potentiiert, einer bestimmten Periode unterworfen, in der dieselben Werte immer wiederkehren. Denn es wird, wie man sieht:

$$i = (\sqrt{-1} = i.$$

1) $(i)^2 = (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$

$(i)^3 = (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} = -i$

$(i)^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = -1 \cdot -1 = 1$

$(i)^5 = (\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1} = i.$

Der Wert von $i^5 = i$.

Verbindet man eine imaginäre Zahl mit einer reellen Zahl durch Addition oder Subtraktion, z. B.:

2) $$a \pm bi = a \pm b \,.\, \sqrt{-1},$$

so erhält man eine Zahlenverbindung, die man als komplexe Zahl oder komplexe Größe bezeichnet. Die komplexen Zahlen spielen in der höheren Mathematik eine hervorragende Rolle. Auch auf technischem Gebiete werden sie jetzt vielfach hervorgezogen; deshalb wollen wir ihre bedeutungsvollen Gesetze und Beziehungen hier folgen lassen.

186. Die Rechnung mit den komplexen Zahlen.

Wir wollen zeigen, daß man mit den komplexen Zahlen wie mit den reellen rechnen kann und, daß man dabei im Resultat wiederum auf komplexe Formen stößt.

Addition. Zwei komplexe Zahlen: $(a + bi)$ und $(\alpha + \beta i)$ sollen addiert werden.

Man addiert in diesem Falle die reellen mit den reellen und die imaginären mit den imaginären Zahlen. Also:

3) $$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i.$$

Setzen wir $(a + \alpha) = A$ und $(b + \beta) = B$, so erhält man als Summe wiederum die komplexe Form $A + Bi$.

Subtraktion. Die komplexen Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ sollen subtrahiert werden. In der entsprechenden Weise wie bei der Addition erhält man:

4) $$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=(a-\alpha)+(b-\beta)i.$$

Multiplikation. Die komplexen Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ sollen mit einander multipliziert werden. Wir wollen die Rechnung wirklich ausführen nach den Regeln der Algebra.

5) $$\begin{aligned}(a+bi)(\alpha+\beta i)&=a\alpha+\alpha bi+a\beta i+b.\beta i.i\\&=a\alpha+\alpha bi+a\beta i-b.\beta\\&=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i.\end{aligned}$$

187. Die konjugierten komplexen Zahlen. Norm, Modulus.

Eine bemerkenswerte Ausnahme tritt bei der Multiplikation zweier komplexen Zahlen ein, die sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden. Multiplizieren wir aus:

6) $$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Wir erhalten also hier als Resultat eine reelle Größe. Zwei komplexe Zahlen, wie die in 6), die sich nur durch das Vorzeichen der imaginären Größen von einander unterscheiden, heißen **konjugierte komplexe Zahlen.** Das Produkt zweier komplexen konjugierten Zahlen (a^2+b^2) nennt man **die Norm.** Die positive Quadratwurzel $(\sqrt{a^2+b^2})$ aus der Norm wird als **der Modulus** bezeichnet. Um anzudeuten, daß die Norm zu einer komplexen Zahl ermittelt werden soll, ist es gebräuchlich, ein „N“ davor zu setzen. Also:

7) $$N(a+bi)=N(a-bi)=a^2+b^2.$$

Zur Bezeichnung des Modulus einer komplexen Zahl endlich setzt man ein „M“ vor dieselbe. Also:

8) $$M(a+bi)=M(a-bi)=\sqrt{a^2+b^2}.$$

188. Die Division.

Zwei komplexe Zahlen sollen durch einander dividiert werden. $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$.

Wir wollen Zähler und Nenner dieses Bruches mit der konjugierten Zahl des Nenners multiplizieren. Also:

$$9)\quad \frac{a+bi}{\alpha+\beta i}=\frac{(a+bi)(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}=\frac{a\alpha+\alpha bi-a\beta i+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$=\frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}.$$

189. Imaginäre Ausdrücke in der Exponentialreihe.

Im Abschnitt 8 finden wir die Beziehung:

$$e^\alpha=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}$$

Setzen wir in diese Reihe für α den Wert $i\alpha$, dann erhalten wir unter Berücksichtigung von 1):

$$10)\quad e^{i\alpha}=1+i\alpha-\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{i\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\frac{i\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^6}{6!}-+\cdots$$

Trennen wir in 10) die reellen Glieder von den imaginären, dann folgt:

$$11)\quad e^{i\alpha}=\left\{1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+-\right\}$$

$$+\left\{\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\cdots\right\}i.$$

In der „Tafel der Reihen“ finden wir, daß:

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\cos x\cdot$$

und $$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sin x\cdot$$ sind.

Werden die Werte in der Gleichung 11) verwendet, dann erhalten wir die wertvolle Beziehung:

12) $$e^{ia} = \cos a + i \cdot \sin a$$

und dementsprechend:

12a) $$e^{-ia} = \cos a - i \cdot \sin a.$$

Durch Addition und Subtraktion von 12) und 12a) gelangt man endlich zu Gleichungen, die merkwürdige Beziehungen zwischen den goniometrischen und den Exponential-Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen. Es ergiebt sich:

13) $$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}.$$

14) $$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}.$$

190. Die Moivresche Formel.

Vereinigt man die Gleichungen 12) und 12a), dann erhält man den allgemeinen Ausdruck:

15) $$e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a.$$

Setzen wir in ihn für a den Wert na, dann geht er über in:

16) $$e^{\pm ina} = \cos na \pm i \sin na.$$

Bedenken wir nun, daß man mit Rücksicht auf 15) auch setzen kann:

$$(e^{\pm ia})^n = (\cos a \pm i \sin a)^n$$

und daß $$e^{\pm ina} = (e^{\pm ia})^n$$

ist, dann folgt sofort die sehr wichtige **Moivresche Formel:**

17) $$(\cos a \pm i \sin a)^n = \cos na \pm i \sin na.$$

Mit Hilfe der Moivreschen Formel gelangt man zu Ausdrücken, durch die man im stande ist die trigonometrischen Funktionen $\sin(na)$ und $\cos(na)$ durch $\sin a$ und $\cos a$ darzustellen:

191. Ableitungen aus der Moivreschen Formel.

Entwickeln wir zudem die Moivresche Formel in der folgenden Weise, indem wir ordnen:

$$\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

$$= \Big\{\cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\alpha \,.\, \sin^2\alpha$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha \,.\, \sin^4\alpha - + \Big\}$$

$$+ i\Big\{n \,.\, \cos^{n-1}\alpha \,.\, \sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha \,.\, \sin^3\alpha + \cdots\Big\}.$$

Trennen wir nun die entsprechenden Werte, dann ergeben sich die Beziehungen:

18) $$\cos(n\alpha) = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}x\sin^2\alpha$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha \,.\, \sin^4\alpha - + \cdots$$

19) $$\sin(n\alpha) = n \,.\, \cos^{n-1}\alpha\sin\alpha$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + - \cdots$$

Sei z. B. $n = 3$, dann erhält man:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \,.\, \sin^2\alpha$$

und $$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \,.\, \sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Die letzte Formel giebt auch die im Abschnitt 138 verwendete Beziehung. Setzen wir, um das zu zeigen, für $\cos^2\alpha$ den Wert $1 - \sin^2\alpha$, dann wird:

$$\sin 3\alpha = 3 \,.\, (1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha$$
$$= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha$$
$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Also: $$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha.$$

192. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen.

Man kann sich, wie in der Algebra auseinandergesetzt wird, die natürlichen Zahlen auf einer geraden Linie dargestellt denken. Zeichnet man sich eine gerade Linie und nimmt auf derselben einen Punkt als Anfangs-

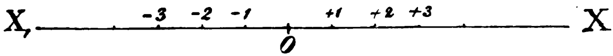


Fig. 37.

punkt (Nullpunkt) an, dann kann man auf derselben nach rechts und links eine Zahl gleicher Teile abtragen. Die Teile nach rechts stellen die positiven Werte 1, 2, 3, ... n dar, die linken die negativen Werte — 1, — 2, — 3, ... — n. (Siehe Fig. 37.)

Auch die Reihe der imaginären Zahlen pflegt man in entsprechender Weise zu veranschaulichen. Wie in der

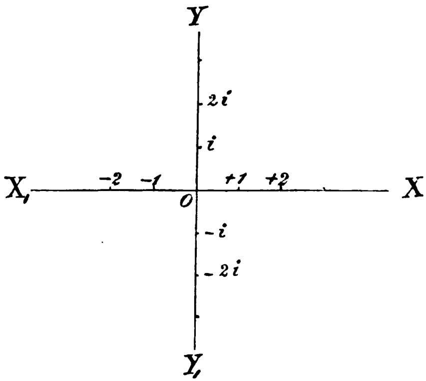


Fig. 38.

Figur 38 errichtet man im Punkte Null auf der Linie der reellen Zahlen eine Senkrechte nach beiden Seiten und trägt

auch auf dieser nach oben und unten eine Anzahl gleicher Teile auf. Die oberen entsprechen den positiven imaginären Werten i, 2i, 3i, ... ni, die unteren den negativen imaginären Werten —i, —2i, —3i, ... —ni.

Man erkennt nun sofort, daß die aus reellen und imaginären Zahlen zusammengesetzten komplexen Größen ihre Darstellung in der Ebene der Koordinaten selbst erfahren. Betrachten wir dazu den Punkt A in der Figur 39. Er sei gegeben durch die Koordinaten OB = a und AB = b. Es wird somit die Linie OA durch die komplexe Größe a + bi erklärt, welche durch ihre Länge und Richtung die Lage von A bestimmt. — Sehr häufig pflegt man diesen Ausdruck auch durch Polarkoordinaten wiederzugeben. Man nennt dann die Linie OA = r den Modulus und den Winkel α das Argument. Es ist nun:

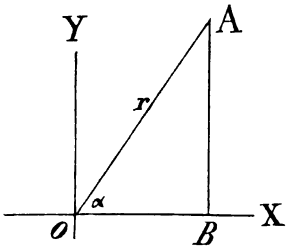


Fig. 39.

20) $$AB = r \sin \alpha$$

und: $$OB = r \cos \alpha.$$ Also:

21) $$a + bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Allgemeine Formeltafel.

1) $$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

2) $$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + 1$$

3) $$(n+1) b^{r+1} = (n) b^r + (n) b^{r+1}$$

4) $$\lim_{x=0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

5) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x) = \frac{d.f(x)}{dx}$$

6) $$f'(a) = 0$$

7) $$f'(x^m) = m x^{m-1}$$

8) $$f'(\sin x) = \cos x$$

9) $$f'(\cos x) = -\sin x$$

10) $$f'(\operatorname{tang} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

11) $$f'(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

12) $$f'(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

13) $f'(\text{cosec}\, x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

14) $f'(\log x) = \frac{\log e}{x}$ $e = 2.7182818 \cdots$

15) $f'(l x) = \frac{1}{x}$

16) $f'(a^x) = a^x \cdot la$

17) $f'(e^x) = e^x$

18) $f'(\text{arc} \sin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

19) $f'(\text{arc} \cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20) $f'(\text{arc tang}\, x) = \frac{1}{1 + x^2}$

21) $f'(\text{arc cotang}\, x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

22) $f'(\text{arc sec}\, x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23) $f'(\text{arc cosec}\, x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24) $f'(u . x) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

25) $f'\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

26) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

27) $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$

$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x)$

28) $$f(x+h) = f(x) + f'(x) . h + f''(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + f'''(x) \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots f^n(x) \cdot \frac{h^n}{n!} + R$$

(Taylorsche Reihe)

29) $$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) . \frac{x^2}{2!} + f'''(0) . \frac{x^3}{3!} + \cdots + f^n(0) \cdot \frac{x^n}{n!} + R$$

(Mac-Laurinsche Reihe)

30) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

31) $$a^x = 1 + x . la + \frac{x^2}{2!}(la)^2 + \frac{x^3}{3!}(la)^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}(la)^n$$

32) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}$$

(n eine ungerade Zahl)

33) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}$$

(n eine gerade Zahl)

34) $$l(1+x) = x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n}$$

35) $$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 . 3}{2 . 4} x^4 + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} x^6 + \cdots$$

36) $$\text{arc} \sin x = x + \frac{x^3}{2 . 3} + \frac{1 . 3}{2 . 4 . 5} x^5 + \cdots$$

37) $$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

38) Tangente (T) $= y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

$$= y\frac{ds}{dy}$$

$$= r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2}$$ (Polarkoordinaten)

39) Normal (N) $= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$= y\frac{ds}{dx}$$

$$= \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}$$ (Polarkoordinaten)

40) Subtangente (St) $= y\frac{dx}{dy}$

$$= \frac{r^2 d\alpha}{dr}$$ (Polarkoordinaten)

41) Subnormale (Sn) $= y\cdot\frac{dy}{dx}$

$$= \frac{dr}{d\alpha}$$ (Polarkoordinaten)

42) Formeln für den Krümmungskreis:

$$\alpha = x - p\cdot\frac{1+p^2}{9} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{9}\cdot p$$

$$\beta = y + \frac{1+p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q} \qquad p = \frac{dy}{dx}$$

$$\varrho = \pm\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q} \qquad q = \frac{d^2y}{dx^2}$$

43) $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

44) $F(x,y)=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F^1(x,y)}{F^2(x,y)}$$

45) $\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}$ *)

46) $\int\frac{dx}{x}=lx$

47) $\int e^x\,dx=e^x$

48) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{la}$

49) $\int\sin x\,dx=-\cos x$

50) $\int\cos x\,dx=\sin x$

51) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x$

52) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tang} x$

53) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}\sin x$

54) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$

55) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx=\sec x$

56) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{arc}\sec x$

57) $\int a\,f'(x)\,dx=a\int f'(x)\,dx$

58) $\int\{F'(x)+f'(x)-\varphi'(x)\}\,dx=\int F'(x)\,dx$
$+\int f'(x)\,dx-\int\varphi'(x)\,dx$

---

*) Die Integrationskonstante ist hier fortgelassen.

59) $$\int\frac{dx}{1+x}=l(1+x)$$

60) $$\int\frac{dx}{x-a}=l(x-a)$$

61) $$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}l(a+bx)$$

62) $$\int\frac{n\,x\,dx}{a+bx^2}=\frac{n}{2b}\cdot l(a+bx^2)$$

63) $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right)$$

64) $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\{l(x-a)-l(x+a)\}$$
$$=\frac{1}{2a}\cdot l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$

65) $$\int\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{x}{a}\right)$$

66) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

67) $$\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}l(a^2+x^2)$$

68) $$\int\frac{x\,dx}{a^2-x^2}=-\sqrt{a^2-x^2}$$

69) $$\int\frac{a\,x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-a\sqrt{a^2-x^2}$$

70) $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{a^2+x^2}$$

71) $$\int\sin x\cdot\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\sin^2 x$$

72) $$\int\operatorname{tang}x\cdot dx=-l\cos x$$

73) $\int \cot x \cdot dx = l \cdot \sin x$

74) $\int \frac{dx}{\sin x . \cos x} = l \operatorname{tang} x$

75) $\int \frac{dx}{\sin x} = -l \cot\left(\frac{x}{2}\right)$

$= l \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)$

76) $\int \frac{dx}{\cos x} = -l . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

$= l . \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

77) $\int \frac{(mx+n)\,dx}{x^2+2ax+b} = \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\alpha} - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x-\beta}$

$= \frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta} \cdot l(x-\alpha) - \frac{m\beta+n}{\alpha-\beta} \cdot l(x-\beta)$.

78) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

79) $\int x . e^x\,dx = e^x(x-1)$

80) $\int lx . dx = x(lx-1)$

81) $\int x^2\,lx\,dx = \frac{x^3}{3}(lx - \frac{1}{3})$

82) $\int x e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}\left(x - \frac{1}{m}\right)$

83) $\int x . \cos x\,dx = x . \sin x + \cos x$

84) $\int x^2 \cos x\,dx = \sin x\,(x^2 + 2x . \cot x - 2)$

85) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x . \cos x + x)$

86) $\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}(\sin x \cos x - x)$

87) $\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx = x$

88) $\int \operatorname{arc} . \sin x\,dx = x . \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2}$

89) $\int \text{arc}.\cos x\,dx = x.\text{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2}$

90) $\int \text{arc tang}\, x\,dx = \text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\, l(1+x^2)$

91) $\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

92) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc}\sin\left(\frac{x}{a}\right)$

93) $\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x^n}{x+1}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{na^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

94) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\, l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

95) $\int x^{n-1}dx\sqrt{a^2-x^2}$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

96) $\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc}\sin\left(\frac{x}{a}\right)$

97) $\int x^{n-1}dx\sqrt{a^2+x^2}$

$$= \frac{x^n}{n+1}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{n+1}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

98) $\int dx\sqrt{a^2+x^2}$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\cdot l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

99) $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

100) $\int_a^b f'(x)\,dx = -\int_b^a f'(x)\,dx$

101) $\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^c f'(x)\,dx + \int_c^b f'(x)\,dx$

102) $F = \int y\,dx$ (Formel für d. Quadratur d. Kurven)

103) $F = \frac{1}{2}\int r^2 d\alpha$ (Quadraturformel in Polarkoord.)

104) $s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$

$= \int_{x_0}^{x} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ (Formeln für die Rektifikation d. Kurven)

105) $s = \int d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}$

$= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 + r^2}$ (Formeln für die Rektifikation in Polarkoordinaten)

106) $F = 2\pi \int y\,ds$

$= 2\pi \int x\,ds$ (Formeln für die Inhaltsbestimmung der Rotationsflächen)

107) $V = \pi \int y^2 dx$

$= \pi \int x^2 dy$ (Formeln für die Kubatur der Rotationskörper)

108) $(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta) i$

109) $(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a - \alpha) + (b - \beta) i$

110) $(a + bi)(\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + (\alpha b + a\beta) i$

111) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

112) $N(a + bi) = N(a - bi) = a^2 + b^2$

113) $M(a + bi) = M(a - bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$

114) $\frac{a + bi}{\alpha + \beta i} = \frac{(a\alpha + b\beta) + (\alpha b - a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2}$

115) $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$

$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i \sin\alpha$

116) $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$

117) $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

118) $(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha$

(Formel von Moivre)

119) $\cos(n\alpha) = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\alpha\,.\,\sin^2\alpha$

$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha\,.\,\sin^4\alpha - + \cdots$

120) $\sin(n\alpha) = n\,.\,\cos^{n-1}\alpha\,.\,\sin\alpha$

$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha\,.\,\sin^3\alpha + - \cdots$

121) $a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Mathematische Litteratur.

Für die Leser, die unser Büchlein studieren wollen, und die früher eine höhere Bildungsanstalt durchgemacht haben, empfehlen wir zur gründlichen Wiederholung der Elementarmathematik:

1) Fischer: „Systematischer Grundriß der Elementar-Mathematik". 2 Teile. Berlin, Duncker.
2) Baltzer: „Elemente der Mathematik". 2 Bde. Leipzig, Hirzel.

Das letzte Werk setzt einen gewandten Mathematiker voraus.

Diejenigen Leser, welche keine systematische Ausbildung in der Elementarmathematik genossen haben, deren mathematische Kenntnisse nur gering sind, werden auf die mathematischen Katechismen im gleichen Verlage hingewiesen. Die folgenden sind zum Verständnis der Differential- und Integralrechnung unerläßlich:

Zetzsche: „Katechismus der Geometrie".
Herrmann: „Katechismus der Algebra".
Bendt: „Katechismus der Trigonometrie".
Friedrich: „Katechismus der analytischen Geometrie".

Zur Einübung der Differential- und Integralrechnung eignen sich die Aufgabensammlungen von:

Dölp: „Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung".
Schlömilch: „Uebungsbuch z. Studium d. höheren Analysis". 2 Bde.
Sohncke: „Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung". 2 Bde.

Für das weitere Studium sei empfohlen:

Schlömilch: „Kompendium der höheren Analysis". 2 Bde.
Kiepert: „Grundriß der Differential- u. Integralrechnung". 2 Bde.
Weber: „Lehrbuch der Algebra". 2 Bde.
Schlömilch: „Handbuch der algebraischen Analysis".
Hesse: „Vorlesungen über die analytische Geometrie: a) der geraden Linie, b) der Kegelschnitte, c) des Raumes".

Druck von J. J. Weber in Leipzig.

Illustrierte Katechismen.

Belehrungen aus dem Gebiete der Wissenschaften, Künste und Gewerbe ꝛc.

In Original-Leinenbänden.

Ackerbau, praktischer. Von Wilhelm Hamm. Dritte Auflage, gänzlich umgearbeitet von A. G. Schmitter. Mit 138 Abbildungen. 1890. 3 Mark.

Agrikulturchemie. Von Dr. E. Wildt. Sechste Auflage. Mit 41 Abbildungen. 1884. 3 Mark.

Algebra, oder die Grundlehren der allgemeinen Arithmetik. Vierte Auflage, vollständig neu bearbeitet von Richard Schurig. 1895. 3 Mark.

Anstandslehre. — Katechismus des guten Tons und der feinen Sitte von Eufemia von Adlersfeld geb. Gräfin Ballestrem. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1895. 2 Mark.

Appretur s. Spinnerei.

Archäologie. Übersicht über die Entwickelung der Kunst bei den Völkern des Altertums von Dr. Ernst Kroker. Mit 3 Tafeln und 127 Abbildungen. 1888. 3 Mark.

Archivkunde s. Registratur.

Arithmetik. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Rechenkunst für Lehrende und Lernende von E. Schick. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Max Meyer. 1889. 3 Mark.

Ästhetik. Belehrungen über die Wissenschaft vom Schönen und der Kunst von Robert Prölß. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1889. 3 Mark.

Astronomie. Belehrungen über den gestirnten Himmel, die Erde und den Kalender von Dr. Hermann J. Klein. Achte, vielfach verbesserte Auflage. Mit einer Sternkarte und 163 Abbildungen. 1893. 3 Mark.

Aufsatz, schriftlicher, s. Stilistik.

Auswanderung. Kompaß für Auswanderer nach europäischen Ländern, Asien, Afrika, den deutschen Kolonien, Australien, Süd- und Zentralamerika, Mexiko, den Vereinigten Staaten von Amerika und Kanada. Siebente Auflage. Vollständig neu bearbeitet von Gustav Meinecke. Mit 4 Karten und einer Abbildung. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Bankwesen. Von Dr. E. Gleisberg. Mit 4 Check-Formularen und einer Übersicht über die deutschen Notenbanken. 1890. 2 Mark.

Baukonstruktionslehre. Mit besonderer Berücksichtigung von Reparaturen und Umbauten. Von W. Lange. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 343 und 1 Tafel Abbildungen. 1895. 3 Mark 50 Pf.

Baustile, oder Lehre der architektonischen Stilarten von den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart von Dr. Ed. Freiherrn von Sacken. Zwölfte Auflage. Mit 103 Abbildungen. 1896. 2 Mark.

Beleuchtung s. Heizung.

Bergbaukunde. Von G. Köhler. Mit 217 Abbildungen. 1891. 4 Mark.

Bergsteigen. — Katechismus für Bergsteiger, Gebirgstouristen und Alpenreisende von Julius Meurer. Mit 22 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Bewegungsspiele für die deutsche Jugend. Von J. C. Lion und J. H. Wortmann. Mit 29 Abbildungen. 1891. 2 Mark.

Bibliothekslehre mit bibliographischen und erläuternden Anmerkungen. Neubearbeitung von Dr. Julius Petzholdts Katechismus der Bibliothekenlehre von Dr. Arnim Gräsel. Mit 33 Abbildungen und 11 Schrifttafeln. 1890. 4 Mark 50 Pf.

Bienenkunde und Bienenzucht. Von G. Kirsten. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage, herausgegeben von J. Kirsten. Mit 51 Abbildungen. 1887. 2 Mark.

Bildhauerei für den kunstliebenden Laien. Von Rudolf Maison. Mit 63 Abbildungen. 1894. 3 Mark.

Bleicherei s. Wäscherei rc.

Blumenzucht s. Ziergärtnerei.

Botanik, allgemeine. Von Prof. Dr. Ernst Hallier. Mit 95 Abbildungen. 1879. 2 Mark 50 Pf.

Botanik, landwirtschaftliche. Von Karl Müller. Zweite Auflage, vollständig umgearbeitet von R. Herrmann. Mit 4 Tafeln und 48 Abbildungen. 1876. 2 Mark.

Briefmarkenkunde und Briefmarkensammelwesen. Von V. Suppantschitsch. Mit 1 Porträt und 7 Textabbildungen. 1895. 3 Mark.

Buchdruckerkunst. Von A. Waldow. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 43 Abbildungen und Tafeln. 1894. 2 Mark 50 Pf.

Buchführung, kaufmännische. Von Oskar Klemich. Fünfte, durchgesehene Auflage. Mit 7 Abbildungen und 3 Wechselformularen. 1895. 2 Mark 50 Pf.

Buchführung, landwirtschaftliche. Von Prof. Dr. K. Birnbaum. 1879. 2 Mark.

Chemie. Von Prof. Dr. H. Hirzel. Siebente, vermehrte Auflage. Mit 35 Abbildungen. 1894. 4 Mark.

Chemikalienkunde. Eine kurze Beschreibung der wichtigsten Chemikalien des Handels. Von Dr. G. Heppe. 1880. 2 Mark.

Chronologie. Mit Beschreibung von 33 Kalendern verschiedener Völker und Zeiten von Dr. Adolf Drechsler. Dritte, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. 1881. 1 Mark 50 Pf.

Correspondance commerciale par J. Forest. D'après l'ouvrage de même nom en langue allemande par C. F. Findeisen. 1895. 3 Mark 50 Pf.

Dampfkessel, Dampfmaschinen und andere Wärmemotoren. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Praktiker, Techniker und Industrielle von Th. Schwartze. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 268 Abbildungen und 13 Tafeln. 1894. 4 Mark 50 Pf.

Darwinismus. Von Dr. Otto Zacharias. Mit dem Porträt Darwins, 30 Abbildungen und 1 Tafel. 1892. 2 Mark 50 Pf.

Differential- und Integralrechnung. Von Franz Bendt. Mit 39 Figuren. 1896. 3 Mark.

Drainierung und Entwässerung des Bodens. Von Dr. William Löbe. Dritte, gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 92 Abbildungen. 1881. 2 Mark.

Dramaturgie. Von Robert Prölß. 1877. 3 Mark.

Droguenkunde. Von Dr. G. Heppe. Mit 30 Abbildungen. 1879. 2 Mark 50 Pf.

Einjährig-Freiwillige. — Der Weg zum Einjährig-Freiwilligen und zum Offizier des Beurlaubtenstandes in Armee und Marine. Von Oberstlieutenant z. D. Exner. 1891. 2 Mark.

Eissegeln und Eisspiele s. Wintersport.

Elektrotechnik. Ein Lehrbuch für Praktiker, Techniker und Industrielle von Th. Schwartze. Sechste, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 256 Abbildungen. 1896. 4 Mark 50 Pf.

Entwässerung s. Drainierung.

Ethik s. Sittenlehre.

Familienhäuser s. Villen.

Färberei und Zeugdruck. Von Dr. Hermann Grothe. Zweite, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 78 Abbildungen. 1885. 2 Mark 50 Pf.

Farbwarenkunde. Von Dr. G. Heppe. 1881. 2 Mark.

Feldmeßkunst. Von Dr. C. Pietsch. Fünfte, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 75 Abbildungen. 1891. 1 Mark 50 Pf.

Feuerwerkerei s. Lustfeuerwerkerei.

Finanzwissenschaft. Von Alois Bischof. Fünfte, verbesserte Auflage. 1890. 1 Mark 50 Pf.

Fischzucht, künstliche, und Teichwirtschaft. Wirtschaftslehre der zahmen Fischerei von E. A. Schroeder. Mit 52 Abbildungen. 1889. 2 Mark 50 Pf.

Flachsbau und Flachsbereitung. Von R. Sontag. Mit 12 Abbildungen, 1872. 1 Mark 50 Pf.

Fleischbeschau s. Trichinenschau.

Forstbotanik. Von H. Fischbach. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 79 Abbildungen. 1894. 2 Mark 50 Pf.

Freimaurerei. Von Dr. Willem Smitt. 1891. 2 Mark.

Galvanoplastik und Galvanostegie. Ein Handbuch für das Selbststudium und den Gebrauch in der Werkstatt von G. Seelhorst. Dritte, durchgesehene und vermehrte Auflage von Dr. G. Langbein. Mit 43 Abbildungen. 1888. 2 Mark.

Gartenbau s. Nutz-, Zier-, Zimmergärtnerei, und Rosenzucht.

Gebärdensprache s. Mimik.

Gedächtniskunst oder Mnemotechnik. Von Hermann Kothe. Siebente, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. G. Pietsch. 1893. 1 Mark 50 Pf.

Geflügelzucht. Ein Merkbüchlein für Liebhaber, Züchter und Aussteller schönen Rassegeflügels von Bruno Dürigen. Mit 40 Abbildungen und 7 Tafeln. 1890. 4 Mark.

Gemäldekunde. Von Dr. Th. v. Frimmel. Mit 28 Abbildungen. 1894. 3 Mark 50 Pf.

Gemüsebau s. Nutzgärtnerei.

Geographie. Vierte Auflage, gänzlich umgearbeitet von Karl Arenz. Mit 57 Karten und Ansichten. 1884. 2 Mark 40 Pf.

Geographie, mathematische. Zweite Auflage, umgearbeitet und verbessert von Dr. Hermann J. Klein. Mit 113 Abbildungen. 1894. 2 Mark 50 Pf.

Geologie. Von Dr. Hippolyt Haas. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 149 Abbildungen, einer Tafel und einer Tabelle. 1893. 3 Mark.

Geometrie, analytische. Von Dr. Max Friedrich. Mit 56 Abbildungen. 1884. 2 Mark 40 Pf.

Geometrie, ebene und räumliche. Von Prof. Dr. K. Ed. Zetzsche. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 223 Abbildungen und 2 Tabellen. 1892. 3 Mark.

Gesangskunst. Von F. Sieber. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit vielen Notenbeispielen. 1894. 2 Mark 50 Pf.

Geschichte, allgemeine, s. Weltgeschichte.

Geschichte, deutsche. Von Wilhelm Kentzler. 1879. Kartoniert 2 Mark 50 Pf.

Gesetzbuch, bürgerliches, nebst Einführungsgesetz und Sachregister. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Gesetzgebung des Deutschen Reiches s. Reich, das Deutsche.

Gesundheitslehre, naturgemäße, auf physiologischer Grundlage. Siebzehn Vorträge von Dr. Fr. Scholz. Mit 7 Abbildungen. 1884. 3 Mark 50 Pf.
(Unter gleichem Titel auch Band 20 von Webers Illustr. Gesundheitsbüchern.)

Girowesen. Von Karl Berger. Mit 21 Formularen. 1881. 2 Mark.

Glasmalerei s. Porzellanmalerei.

Handelsmarine, deutsche. Von R. Dittmer. Mit 66 Abbildungen. 1892. 3 Mark 50 Pf.

Handelsrecht, deutsches, nach dem Allgemeinen Deutschen Handelsgesetzbuche von Robert Fischer. Dritte, umgearbeitete Auflage. 1885. 1 Mark 50 Pf.

Handelswissenschaft. Von K. Arenz. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Gust. Rothbaum und Ed. Deimel. 1890. 2 Mark.

Heerwesen, deutsches. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Moritz Exner. Mit 7 Abbildungen. 1896. 3 Mark.

Heizung, Beleuchtung und Ventilation. Von Th. Schwartze. Mit 159 Abbildungen. 1884. 3 Mark.

Heraldik. Grundzüge der Wappenkunde von Dr. Ed. Freih. v. Sacken. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 215 Abbildungen. 1893. 2 Mark.

Hufbeschlag. Zum Selbstunterricht für Jedermann. Von E. Th. Walther. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 67 Abbildungen. 1889. 1 Mark 50 Pf.

Hunderassen. Von Franz Krichler. Mit 42 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Hüttenkunde, allgemeine. Von Dr. E. F. Dürre. Mit 209 Abbildungen. 1877. 4 Mark 50 Pf.

Jagdkunde. — Katechismus für Jäger und Jagdfreunde von Franz Krichler. Mit 33 Abbildungen. 1891. 2 Mark 50 Pf.

Kalenderkunde. Belehrungen über Zeitrechnung, Kalenderwesen und Feste von O. Freih. von Reinsberg-Düringsfeld. Mit 2 Tafeln. 1876. 1 Mark 50 Pf.

Kindergärtnerei, praktische. Von Fr. Seidel. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 35 Abbildungen. 1887. 1 Mark 50 Pf.

Kirchengeschichte. Von Friedr. Kirchner. 1880. 2 Mark 50 Pf.

Klavierspiel. Von Fr. Taylor. Deutsche Ausgabe von Math. Stegmayer. Zweite, verbesserte Auflage. Mit vielen Notenbeispielen. 1893. 2 Mark.

Knabenhandarbeit. Ein Handbuch des erziehlichen Arbeitsunterrichts von Dr. Woldemar Götze. Mit 69 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Kompositionslehre. Von J. C. Lobe. Sechste Auflage. Mit vielen Musikbeispielen. 1895. 2 Mark.

Korrespondenz, kaufmännische, in deutscher Sprache. Von C. F. Findeisen. Vierte, vermehrte Auflage, bearbeitet von Franz Hahn. 1896. 2 Mark 50 Pf.
—— —— in französischer Sprache s. Correspondance commerciale.

Kostümkunde. Von Wolfg. Quincke. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 459 Kostümfiguren in 152 Abbildungen. 1896. 4 Mark 50 Pf.

Kriegsmarine, deutsche. Von R. Dittmer. Mit 126 Abbildungen. 1890. 3 Mark.

Kulturgeschichte. Von J. J. Honegger. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1889. 2 Mark.

Kunstgeschichte. Von Bruno Bucher. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 276 Abbildungen. 1895. 4 Mark.

Liebhaberkünste. Von Wanda Friedrich. Mit 250 Abbildungen. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Litteraturgeschichte, allgemeine. Von Dr. Ad. Stern. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1892. 3 Mark.

Litteraturgeschichte, deutsche. Von Dr. Paul Möbius. Siebente, verbesserte Auflage von Dr. Gotthold Klee. 1896. 2 Mark.

Logarithmen. Von Max Meyer. Mit 3 Tafeln und 7 Abbildungen. 1880. 2 Mark.

Logik. Von Friedr. Kirchner. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 36 Abbildungen. 1890. 2 Mark 50 Pf.

Luftfeuerwerkerei. Kurzer Lehrgang für die gründliche Ausbildung in allen Teilen der Pyrotechnik von C. A. von Nida. Mit 124 Abbildungen. 1883. 2 Mark.

Malerei. Von Karl Raupp. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 50 Abbildungen und 4 Tafeln. 1894. 3 Mark.

Marine s. Handels- bez. Kriegsmarine.

Markscheidekunst. Von O. Brathuhn. Mit 174 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Mechanik. Von Ph. Huber. Fünfte, wesentlich vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 207 Abbildungen. 1892. 3 Mark.

Meteorologie. Von Prof. Dr. W. J. van Bebber. Dritte, gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 63 Abbildungen. 1893. 3 Mark.

Mikroskopie. Von Prof. Carl Chun. Mit 97 Abbildungen. 1885. 2 Mark.

Milchwirtschaft. Von Dr. Eugen Werner. Mit 23 Abbildungen. 1884. 3 Mark.

Mimik und Gebärdensprache. Von Karl Skraup. Mit 60 Abbildungen. 1892. 3 Mark 50 Pf.

Mineralogie. Von Dr. Eugen Hussak. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 154 Abbildungen. 1896. 2 Mark 50 Pf.

Münzkunde. Von H. Dannenberg. Mit 11 Tafeln Abbildungen. 1891. 4 Mark.

Musik. Von J. C. Lobe. Sechsundzwanzigste Auflage. 1896. 1 Mark 50 Pf.

Musikgeschichte. Von R. Musiol. Mit 15 Abbildungen und 34 Notenbeispielen. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1888. 2 Mark 50 Pf.

Musikinstrumente. Von Richard Hofmann. Fünfte, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 189 Abbildungen. 1890. 4 Mark.

Mythologie. Von Dr. E. Kroker. Mit 73 Abbildungen. 1891. 4 Mark.

Naturlehre. Erklärung der wichtigsten physikalischen, meteorologischen und chemischen Erscheinungen des täglichen Lebens von Dr. C. E. Brewer. Vierte, umgearbeitete Auflage. Mit 53 Abbildungen. 1893. 3 Mark.

Nivellierkunst. Von Prof. Dr. C. Pietsch. Vierte, umgearbeitete Auflage. Mit 61 Abbildungen. 1895. 2 Mark.

Numismatik s. Münzkunde.

Nutzgärtnerei. Grundzüge des Gemüse- und Obstbaues von Hermann Jäger. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage, nach den neuesten Erfahrungen und Fortschritten umgearbeitet von J. Wesselhöft. Mit 63 Abbildungen. 1893. 2 Mark 50 Pf.

Obstbau s. Nutzgärtnerei.

Orden s. Ritter- und Verdienstorden.

Orgel. Erklärung ihrer Struktur, besonders in Beziehung auf technische Behandlung beim Spiel von C. F. Richter. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Hans Menzel. Mit 25 Abbildungen. 1896. 3 Mark.

Ornamentik. Leitfaden über die Geschichte, Entwickelung und die charakteristischen Formen der Verzierungsstile aller Zeiten von F. Kanitz. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 131 Abbildungen. 1896. 2 Mark.

Pädagogik. Von Lic. Dr. Fr. Kirchner. 1890. 2 Mark.

Paläographie s. Urkundenlehre.

Paläontologie s. Versteinerungskunde.

Perspektive, angewandte. Nebst Erläuterungen über Schattenkonstruktion und Spiegelbilder. Von Max Kleiber. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 145 in den Text gedruckten und 7 Tafeln Abbildungen. 1896. 3 Mark.

Petrefaktenkunde s. Versteinerungskunde.

Petrographie. Lehre von der Beschaffenheit, Lagerung und Bildungsweise der Gesteine von Dr. J. Blaas. Mit 40 Abbildungen. 1882. 2 Mark.

Philosophie. Von J. H. v. Kirchmann. Dritte, durchgesehene Auflage. 1888. 2 Mark 50 Pf.

Philosophie, Geschichte der, von Thales bis zur Gegenwart. Von Lic. Dr. Fr. Kirchner. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 1896. 4 Mark

Photographie. Anleitung zur Erzeugung photographischer Bilder von Dr. J. Schnauß. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 40 Abbildungen. 1895. 2 Mark 50 Pf.

Phrenologie. Von Dr. G. Scheve. Achte Auflage. Mit Titelbild und 18 Abbildungen. 1896. 2 Mark.

Physik. Von Dr. J. Kollert. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 273 Abbildungen. 1895. 4 Mark 50 Pf.

Poetik, deutsche. Von Dr. J. Minckwitz. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1877. 1 Mark 80 Pf.

Porzellan- und Glasmalerei. Von Robert Ulke. Mit 77 Abbildungen. 1894. 3 Mark.

Projektionslehre. Mit einem Anhange, enthaltend die Elemente der Perspektive. Von Julius Hoch. Mit 100 Abbildungen. 1891. 2 Mark.

Psychologie. Von Fr. Kirchner. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1896. 3 Mark.

Pyrotechnik s. Lustfeuerwerkerei.

Raumberechnung. Anleitung zur Größenbestimmung von Flächen und Körpern jeder Art von Dr. E. Pietsch. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 55 Abbildungen. 1888. 1 Mark 80 Pf.

Rechenkunst s. Arithmetik.

Rechtschreibung, neue deutsche. Von Dr. G. A. Saalfeld. 1895. 3 Mark 50 Pf.

Redekunst. Anleitung zum mündlichen Vortrage von Roderich Benedix. Fünfte Auflage. 1896. 1 Mark 50 Pf.

Registratur- und Archivkunde. Handbuch für das Registratur- und Archivwesen bei den Reichs-, Staats-, Hof-, Kirchen-, Schul- und Gemeindebehörden, den Rechtsanwälten rc., sowie bei den Staatsarchiven von Georg Holtzinger. Mit Beiträgen von Dr. Friedr. Leist. 1883. 3 Mark.

Reichspost, deutsche. Von W. Lenz. 1882. 2 Mark 50 Pf.

Reich, das deutsche. Ein Unterrichtsbuch in den Grundsätzen des deutschen Staatsrechts, der Verfassung und Gesetzgebung des Deutschen Reiches von Dr. Wilh. Zeller. Zweite, vielfach umgearbeitete und erweiterte Auflage. 1880. 3 Mark.

einigung s. Wäscherei.

Ritter- und Verdienstorden aller Kulturstaaten der Welt innerhalb des 19. Jahrhunderts. Auf Grund amtlicher und anderer zuverlässiger Quellen zusammengestellt von Maximilian Gritzner. Mit 760 Abbildungen. 1893. 9 Mark, in Pergament-Einband 12 Mark.

Rosenzucht. Vollständige Anleitung über Zucht, Behandlung und Verwendung der Rosen im Lande und in Töpfen von Hermann Jäger. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von P. Lambert. Mit 70 Abbildungen. 1893. 2 Mark 50 Pf.

Schachspielkunst. Von K. J. S. Portius. Elfte Auflage. 1895. 3 Mark.
Schlitten- und Schlittschuhsport s. Wintersport.
Schneeschuhsport s. Wintersport.
Schreibunterricht. Dritte Auflage, neu bearbeitet von Georg Funk. Mit 82 Figuren. 1893. 1 Mark 50 Pf.
Schwimmkunst. Von Martin Schwägerl. Mit 113 Abbildungen. 1880. 2 Mark.
Sittenlehre. Von Lic. Dr. Friedrich Kirchner. 1881. 2 Mark 50 Pf.
Sozialismus, moderner. Von Max Haushofer. 1896. 3 Mark.
Sphragistik s. Urkundenlehre.
Spinnerei, Weberei und Appretur. Lehre von der mechanischen Verarbeitung der Gespinstfasern. Dritte, bedeutend vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. A. Ganswindt. Mit 196 Abbildungen. 1890. 4 Mark.
Sprachlehre, deutsche. Von Dr. Konrad Michelsen. Dritte Auflage, herausgegeben von Eduard Michelsen. 1878. 2 Mark 50 Pf.
Staatsrecht s. Reich, das Deutsche.
Stenographie. Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende der Stenographie im allgemeinen und des Systems von Gabelsberger im besonderen von Prof. H. Krieg. Zweite, vermehrte Auflage. 1888. 2 Mark 50 Pf.
Stilarten s. Baustile.
Stilistik. Eine Anweisung zur Ausarbeitung schriftlicher Aufsätze von Dr. Konrad Michelsen. Zweite, durchgesehene Auflage, herausgegeben von Ed. Michelsen. 1889. 2 Mark.
Tanzkunst. Ein Leitfaden für Lehrer und Lernende nebst einem Anhang über Choreographie von Bernhard Klemm. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 82 Abbildungen. 1894. 2 Mark 50 Pf.
Technologie, mechanische. Von A. v. Ihering. Mit 163 Abbildungen. 1888. 4 Mark.
Teichwirtschaft s. Fischzucht.
Telegraphie, elektrische. Von Prof. Dr. K. Ed. Zetzsche. Sechste, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 315 Abbildungen. 1883. 4 Mark.
Tierzucht, landwirtschaftliche. Von Dr. Eugen Werner. Mit 20 Abbildungen. 1880. 2 Mark 50 Pf.
Ton, der gute, s. Anstandslehre.
Trichinenschau. Von F. W. Rüffert. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 52 Abbildungen. 1895. 1 Mark 80 Pf.
Trigonometrie. Von Franz Bendt. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 42 Figuren. 1894. 1 Mark 80 Pf.
Turnkunst. Von Dr. M. Kloss. Sechste, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 100 Abbildungen. 1887. 3 Mark.
Uhrmacherkunst. Von F. W. Rüffert. Dritte, vollständig neu bearbeitete Auflage. Mit 229 Abbildungen und 7 Tabellen. 1885. 4 Mark.
Uniformkunde. Von Richard Knötel. Mit über 1000 Einzelfiguren auf 100 Tafeln, gezeichnet vom Verfasser. 1896. 6 Mark.
Urkundenlehre. — Katechismus der Diplomatik, Paläographie, Chronologie und Sphragistik von Dr. Fr. Leist. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 6 Tafeln Abbildungen. 1893. 4 Mark.
Ventilation s. Heizung.
Verfassung des Deutschen Reiches s. Reich, das Deutsche.
Versicherungswesen. Von Oskar Lemcke. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. 1888. 2 Mark 40 Pf.
Verskunst, deutsche. Von Dr. Roderich Benedix. Dritte, durchgesehene und verbesserte Auflage. 1894. 1 Mark 50 Pf.
Versteinerungskunde (Petrefaktenkunde, Paläontologie). Von Hippolyt Haas. Mit 178 Abbildungen. 1887. 3 Mark.

Druck von J. J. Weber in Leipzig.